PROBLEMAS OLÍMPICOS DE ÁLGEBRA LINEAR

RICARDO BORTOLOTTI - SEMANA OLÍMPICA 2022

1. Alguns problemas da IMC

Problema 1 (IMC 2021). *Seja A uma matriz real $n \times n$ tal que $A^3 = 0$.*

a) Prove que existe uma única matriz real $n \times n$ que satisfaz a equação

$$X + AX + XA^2 = A$$

b) Espresse X em termos de A.

Problema 2 (IMC 2021). *Seja A uma matriz real $n \times n$ e suponha que para todo inteiro positivo m existe uma matriz real simétrica B tal que*

$$2021B = A^m + B^2$$

Prove que $|\det A| \leq 1$.

Problema 3 (IMC 2020). *Sejam A e B matrizes reais $n \times n$ tais que*

$$\mathrm{rk}(AB - BA + I) = 1,$$

onde I é a matriz identidade $n \times n$.

Prove que

$$\mathrm{tr}(ABAB) - \mathrm{tr}(A^2B^2) = \frac{n(n-1)}{2}$$

(rk e tr denotam o o posto e o traço da matriz M, respectivamente).

Problema 4 (IMC 2019). *Um número de 4 dígitos $YEAR$ é dito muito bom se o sistema linear de equações*

$$\begin{aligned} Yx + Ey + Az + Rw &= Y \\ Rx + Yy + Ez + Aw &= E \\ Ax + Ry + Yz + Ew &= A \\ Ex + Ay + Rz + Yw &= R \end{aligned}$$

nas variáveis x, y, z, w tem pelo menos duas soluções.

Encontre todos os números $YEAR$ muito bons do século 21 (entre 2001 e 2100).

Problema 5 (IMC 2019). *Determine se existe algum inteiro positivo ímpar n e A e B matrizes quadradas $n \times n$ com entradas inteiras que satisfazem:*

a) $\det(B) = 1$;

b) $AB = BA$;

c) $A^4 + 4A^2B^2 + 16B^4 = 2019I$

(onde I denota a matriz identidade $n \times n$)

Problema 6 (IMC 2019). *Determine todos os inteiros positivos n para os quais existem matrizes reais $n \times n$ invertíveis A e B que satisfazem*

$$AB - BA = B^2 A$$

Problema 7 (IMC 2011). *Existe uma matriz real 3×3 tal que $\operatorname{tr}(A) = 0$ e $A^2 + A^T = I$?*

Problema 8 (IMC 2003). *Seja A uma matriz real $n \times n$ tal que*

$$3A^3 = A^2 + A + I.$$

Mostre que a sequência $\{A^k\}$ converge para uma matriz idempotente (B é idempotente se satisfaz $B^2 = B$).

Problema 9 (IMC 2003). *Sejam A e B matrizes $n \times n$ tais que $AB + A + B = 0$. Mostre que $AB = BA$.*

Problema 10 (IMC 2005). *Seja A a matriz $n \times n$ dado por $A = [a_{ij}]$ com $a_{ij} = i + j$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Qual é o posto de A?*

Problema 11 (IMC 1995). *Seja X uma matriz quadrada invertível com colunas $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Seja Y a matriz com colunas $x_2, x_3, \cdots, x_n, 0$. Mostre que as matrizes $A = YX^{-1}$ e $B = X^1 Y$ tem posto $n - 1$ e que seus autovalores são todos iguais a 0.*

2. Alguns problemas da OBM-U

Problema 12 (OBMU). *Seja A uma matriz real quadrada $n \times n$. Suponha que existe um inteiro positivo m tal que $(X^2 + I)^m = 0$.*

a) Mostre que $n \neq 2011$.

b) Se $n = 2010$, é possível concluir que $X^2 + I = 0$?

Problema 13 (OBMU 2016). *Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & -\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & -3 \end{bmatrix}$. Encontre todos os pares de números $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ com $|m| \leq n$ tais que*

$$A^n - (n^2 + m)A$$

tenha todas as entradas inteiras.

Problema 14 (OBMU 2016). *Encontre todas as matrizes 2×2 com entradas reais tais que*

$$A^3 + 3A^2 + 2I = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Problema 15 (OBMU 2015). *Sejam Q uma matriz real ortogonal $n \times n$ (ou seja, $QQ^T = Q^TQ = I$) e P uma matriz real de permutação (ou seja, as entradas de P são iguais a 0 ou 1, com exatamente uma entrada igual a 1 por linha ou por coluna).*

Prove que as duas condições abaixo são equivalentes:

a) Existem matrizes triangulares superiores U_0 e U_1 com $Q = U_0PU_1$.

b) Existem matrizes triangulares inferiores L_0 e L_1 com $Q = L_0PL_1$.

Problema 16 (OBMU 2014). *Considere as matrizes 3×3 cujas entradas são inteiros entre 0 e 9 (inclusive). Determine o maior determinante possível de uma tal matriz.*

Problema 17 (OBMU 2012). *Sejam $M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $M_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Para cada uma das matrizes M_i, $i = 1, 2, 3$, determine quantas matrizes A_i existem com $A_i^5 = M_i$.*

Problema 18 (OBMU 2012). *Considere todas as matrizes quadradas de ordem $4n$ que têm $4n$ entradas iguais a 1 e $4n$ entradas iguais a -1 e as demais entradas iguais a 0. Qual é o maior valor possível de seu determinante (em função de n)?*

Problema 19 (OBMU 2016). *Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & -\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & -3 \end{bmatrix}$. Encontre todos os pares de números $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ com $|m| \le n$ tais que*

$$A^n - (n^2 + m)A$$

tenha todas as entradas inteiras.

Problema 20 (OBMU 2015). *Sejam Q uma matriz real ortogonal $n \times n$ (ou seja, $QQ^T = Q^TQ = I$) e P uma matriz real de permutação (ou seja, as entradas de P são iguais a 0 ou 1, com exatamente uma entrada igual a 1 por linha ou por coluna).*

Prove que as duas condições abaixo são equivalentes:

a) Existem matrizes triangulares superiores U_0 e U_1 com $Q = U_0PU_1$.

b) Existem matrizes triangulares inferiores L_0 e L_1 com $Q = L_0PL_1$.

Problema 21 (OBMU 2012). *Considere todas as matrizes quadradas de ordem n que têm $4n$ entradas iguais a 1 e $4n$ entradas iguais a -1 e as demais entradas iguais a 0. Qual é o maior valor possível de seu determinante (em função de n)?*

Problema 22 (OBMU 2011). *Se $u_1, \cdots, u_k \in \mathbb{R}^3$, denote por $C(u_1, \cdots, u_k)$ o cone gerado por $u_1, \cdots, u_k$:*

$$C(u_1, \cdots, u_k) = \{a_1u_1 + \cdots a_ku_k | a_1, \cdots, a_k \in [0, +\infty)\}$$

Sejam v_1, v_2, v_3, v_4 pontos sorteados independente e uniformemente na esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

a) Qual é a probabilidade de que $C(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^3$?

b) Qual é a probabilidade de que cada um dos quatro vetores sejam necessários para gerar $C(v_1, v_2, v_3, v_4)$, isto é, que $C(v_1, v_2, v_3) \neq C(v_1, v_2, v_3, v_4)$, $C(v_1, v_2, v_4) \neq C(v_1, v_3, v_4)$, $C(v_2, v_3, v_4) \neq C(v_1, v_2, v_3, v_4)$ e $C(v_1, v_2, v_3) \neq C(v_1, v_2, v_3, v_4)$?

Problema 23 (OBMU 2011). *Sejam (x_n) uma sequência de números inteiros que satisfaz uma recorrência linear de ordem k para um certo inteiro positivo k fixado, isto é, existem constantes reais $c_1, c_2, \cdots, c_k$ tais que*

$$x_{n+k} = \sum_{r=1}^{k} c_r x_{n+k-r}, \text{ para todo } n \geq 0.$$

Suponha que k é o menor inteiro positivo com essa propriedade. Prove que $c_j \in \mathbb{Z}$ para todo j com $1 \leq j \leq k$.

Problema 24 (OBMU 2010). *Sejam n_1 e n_2 inteiros positivos e $n = n_1 n_2$. Considere a matriz real simétrica $n \times n$, $a = [a_i, j]_{1 \leq i,j \leq n}$, tal que para todo i:*

a) $a_{i,i} = 4$,

b) $a_{i,i+1} = a_{i,i+1} = -1$ quando $i + 1$ não é múltiplo de n_1,

c) $a_{i,i+n_1} = a_{i+n_1,i} = -1$ quando $i + 1$ não é múltiplo de n_1,

e as demais entradas $a_{i,j}$ são a iguais a 0.

Prove que A é invertível e todas as entradas de A^{-1} são positivas.

Problema 25 (OBMU 2007). *Seja A uma matriz real quadrada simétrica de ordem n, e $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ seus autovalores (contados com multiplicidade). Determine, em função de $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$:*

a) O número de matrizes reais B simétricas de ordem n tais que $B^2 = A$.

b) O número de matrizes reais B de ordem n tais que $B^2 = A$.

Problema 26 (OBMU 2006). *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prove que, para $n > 1$, não existem inteiros $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n$ com $a_2, a_3, \cdots, a_n$ e $b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}$ não todos nulos tais que

$$A^{a_1} B^{b_1} A^{a_2} B^{b_2} \cdots A^{a_n} B^{b_n} = I,$$

onde I é a matriz identidade.

Problema 27 (OBMU 2005). *Determine, em função de n, o número de possíveis valores para o determinante de A, dado que A é uma matriz real $n \times n$ tal que $A^3 - A^2 - 3A + 2I = 0$, onde I representa a matriz identidade $n \times n$, e 0 representa a matriz nula $n \times n$.*

Problema 28 (OBMU 2005). *Sejam $v_1, v_2, \cdots, v_n$ vetores em $\mathbb{R}^2$ tais que $||v_i|| \leq 1$ para $i \leq 1 \leq n$ e $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$. Prove que existe uma permutação σ de $\{1, 2, \cdots, n\}$ tal que $||\sum_{j=1}^{k} v_{\sigma(j)}|| \leq \sqrt{5}$ para $1 \leq k \leq n$.*

Problema 29 (OBMU 2005). *Prove que para quaisquer naturais* $0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k$ *e* $0 \leq j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_k$, *a matriz* $A = [a_{r,s}]_{1\leq r,s\leq k}$ *de ordem* k *dada por* $a_{r,s} = \binom{i_r + j_s}{i_r} = \dfrac{(i_r + j_s)!}{i_r! j_s!}$ *é inversível.*

Problema 30 (OBMU 2004). *Seja* A *uma matriz real inversível de ordem* n *e* A^t *sua transposta. Sejam* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ *os auto-valores de* A^tA. *Definimos a norma de* A *por* $A = \sqrt{\lambda_1}$ *e o fator de dilatação de* A *por* $d(A) = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$. *Prove que, para quaisquer matrizes reais inversíveis* A *e* B, $d(AB) \geq \frac{||AB||}{||A||\cdot||B||} d(B)$.

Problema 31 (OBMU 2001). *Definimos* $SL(2,\mathbb{Z})$ *como o conjunto das matrizes* 2×2 *com coeficientes inteiros e determinante* 1. *Seja* $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ *uma matriz tal que existe* $n > 0$ *inteiro com* $A^n = I$.

Prove que existe $X \in SL(2,\mathbb{Z})$ *tal que* $X^{-1}AX$ *é igual a uma das matrizes:*

$$\pm\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad \pm\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad \pm\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad , \quad \pm\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

3. Um pouco de teoria e mais problemas

Definição 1. *Seja* A *uma matriz quadrada, o* ***polinômio minimal de*** A, *denotado por* p_A^m *é o polinômio mônico (coeficiente de maior grau igual a* 1*)* $q(x)$ *de menor grau tal que* $q(A) = 0$.

Definição 2. *Seja* A *uma matriz quadrada, o* ***polinômio característico de*** A, *denotado por* p_A^c *é o polinômio* $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Fatos. *Seja* A *uma matriz quadrada complexa. Então:*

- *(Teorema de Cayley-Hamilton)* p_A^m *divide* p_A^c;
- $p(A) = 0$ *se e somente se* p_A^m *divide* p.
- *Todos os auto-valores de* A *são raízes de* p_A^m.
- *Se* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *são os auto-valores de* A *e* $q(x)$ *um polinômio, então os auto-valores de* $q(A)$ *são* $q(\lambda_1), \cdots, q(\lambda_n)$.

Problema 32. *Seja* A *uma matriz quadrada invertível com todas as entradas inteiras. Prove que* A^{-1} *tem todas as entradas inteiras se, e somente se,* $\det A$ *é igual a* 1 *ou* -1.

Problema 33. *(CIIM-2019) Seja* $\{k_1, k_2, ..., k_m\}$ *um conjunto de* m *números inteiros. Demostre que existe uma matriz* $m \times m$ *com entradas inteiras* A *tal que as matrizes* $A + k_j I$, $1 \leq j \leq m$ *são invertíveis e suas inversas têm entradas inteiras (aqui* I *denota a matriz identidade).*

Problema 34. *Sejam* A *e* B *matrizes* $n \times n$ *e* I *a matriz identidade. Mostre que* $\det(I + AB) = \det(I + BA)$.