25ª Semana Olímpica – Recife – Julho de 2022
Problemas de Análise Real – Nível Universitário

Rogério Ricardo Steffenon

UNISINOS – Universidade do Vale do Rio dos Sinos

E-mail: steffenonenator@gmail.com

Resumo

Nesta aula resolveremos problemas sobre sequências e séries de números reais.

Problema 1. Seja $\mathbf{A}$ o conjunto dos inteiros positivos que não têm o algarismo $a \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ na sua representação decimal.

(a) Mostre que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{A}} \frac{1}{n}$ converge.

(b) Determine todos os valores de α tais que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{A}} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge.

Problema 2. Considere a sequência definida por $c_0 = 0, c_1 = 1$ e $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ para $n \geqslant 2$.

Encontre a função f tal que $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ e uma expressão para o termo geral c_n.

Problema 3. Seja $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ a sequência de Fibonacci definida por $f_0 = 0, f_1 = 1$ e $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ para $n \geqslant 1$.

(a) Se $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k^2$, calcule $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{S_n}$.

(b) Calcule $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{f_n f_{n+2}}$.

(c) Calcule $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{f_{2n}}$.

Problema 4. Sejam $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos divergente e $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.

(a) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{S_n S_{n-1}^{\beta}}$ converge se $\beta > 0$.

(b) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ diverge se $\alpha \leqslant 1$ e converge se $\alpha > 1$.

(c) Se $S_n > 1$, para todo $n \geqslant 1$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n \ln S_n}$ diverge e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n \ln^{\alpha} S_n}$ converge se $\alpha > 1$.

Problema 5. Sejam $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos convergente e $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

Mostre que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}^{\alpha}}$ converge se $\alpha < 1$ *e* diverge se $\alpha \geqslant 1$.

Problema 6 – Desigualdade de Carleman.

Mostre que se $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de números reais positivos, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_1 \cdots a_n} < e \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Problema 7 – Regra de L'Hôpital Discreta.

(a) Prove que se A_n é crescente e $\lim A_n = +\infty$ e se $\lim \dfrac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = L$, então $\lim \dfrac{a_n}{A_n} = L$.

(b) Use o item (a) para deduzir que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1$.

Problema 8 – Teste de Condensação de Cauchy. Seja (a_n) uma sequência decrescente com $\lim a_n = 0$.

(a) Prove que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se, e somente se, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$ converge.

(b) Use o item (a) para provar que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p}$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leqslant 1$.

(c) Use os itens (a) e (b) para provar que a série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n(\log n)^p}$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leqslant 1$.

Problema 9 – Teorema de Schlömilch. Se g_k é um sequência de inteiros positivos estritamente crescente tal que para algum $c > 0$ e para todo $k \in \mathbb{N}, g_{k+1} - g_k \leqslant c\,(g_k - g_{k-1})$ e se a_n é uma sequência de termos positivos estritamente decrescente, então

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se, e somente se, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (g_{n+1} - g_n) a_{g_n}$ converge.

Problema 10 – IMC 2010. Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ definida recursivamente por $x_1 = \sqrt{5}$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2$, se $n \geqslant 1$.

Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}}$.

Problema 11 – IMC 2011. Seja $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ uma sequência com $\dfrac{1}{2} < a_n < 1$ para todo $n \geqslant 0$.

Defina a sequência $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ por $x_0 = a_0, x_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1} x_n}$ $(n \geqslant 0)$.

Quais são os possíveis valores de $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$? Essa sequência pode ser divergente?

Problema 12 – IMC 2012. Considere a sequência definida por $a_0 = 1, a_1 = \dfrac{1}{2}$ e $a_{n+1} = \dfrac{n a_n^2}{1 + (n+1) a_n}$, se $n \geqslant 1$.

Prove que a série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ converge e determine sua soma.

Problema 13. Qual é a condição que os números reais positivos a, b e c devem satisfazer para que a série convirja?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{a} - \frac{\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{2} \right)$$

Problema 14 – IMC 2014. Considere a sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (1,\, 1,\, 2,\, 1,\, 2,\, 3,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 1,\, \ldots)$.

Encontre todos os pares de números reais positivos (α, β) tais que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^\alpha} = \beta,$ onde $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$

Problema 15 – IMC 2015. Considere a sequência $F(0) = 0, F(1) = \dfrac{3}{2}$ e $F(n) = \dfrac{5}{2}F(n-1) - F(n-2)$, se $n \geqslant 2$.

A soma da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F(2^n)}$ é um número racional?

Problema 16 – IMC 2016.

Seja $(x_1,\, x_2,\, \ldots)$ uma sequência de números reais positivos satisfazendo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2n-1} = 1.$

Prove que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{x_n}{k^2} \leqslant 2.$

Problema 17 – IMC 2015. Prove que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < 2.$

Problema 18 – IMC 2018. Sejam $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ duas sequências de números positivos.

Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) Existe uma sequência $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ de números positivos tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b_n}$ são ambas convergentes.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}$ converge.

Problema 19 – IMC 2019. Calcule o produto $\displaystyle\prod_{n=3}^{\infty} \frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}.$

Problema 20 – IMC 2019. Seja $C = \{4,\, 6,\, 8,\, 9,\, 10,\, \ldots\}$ o conjunto dos inteiros positivos compostos.

Para cada $n \in C$, seja a_n o menor inteiro positivo k tal que $k!$ é divisível por n.

Determine se a série abaixo converge:

$$\sum_{n\in C} \left(\frac{a_n}{n}\right)^n.$$

Problema 21 – IMC 2018. Seja $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ a sequência de números reais $a_0 = 0$ e $a_{n+1}^3 = a_n^2 - 8$ para $n \geqslant 0$.

Prove que a série abaixo é convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|.$$

Problema 22. Seja (a_n) uma sequência decrescente com $\lim a_n = 0$ e $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ uma função decrescente.

(a) Prove que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se, e somente se, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n a_{3^n}$ converge.

(b) Use o item (a) para provar que a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f(n)}{\log n}$ se, e somente se, a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} 3^n \frac{f(3^n)}{\log(3^n)}$ converge.

(c) Prove que $\displaystyle\sum_{p \text{ primo}} f(p)$ converge se, e somente se, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f(n)}{\log n}$ converge.

Problema 1. Seja $\mathbf{A}$ o conjunto dos inteiros positivos que não têm o algarismo $a \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ na sua representação decimal.

(a) Mostre que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{A}} \frac{1}{n}$ converge.

(b) Determine todos os valores de α tais que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{A}} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Solução – Resolvido na SO: (a) Vamos dividir em dois casos: $a = 0$ e $a \neq 0$.

- $a = 0$: Seja $\mathbf{A}_k = \{n \in \mathbb{N} : n$ tem k algarismos, mas n não tem o algarismo 0 na sua representação decimal$\}$.

  Neste caso $\mathbf{A}_k$ tem 9^k elementos e $\mathbf{A} = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k$ (união disjunta) e se $x \in \mathbf{A}_k$, então $x \geqslant 10^{k-1}$.

  Assim segue que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{A}} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbf{A}_k} \frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9^k}{10^{k-1}} = 9 + \frac{9^2}{10} + \cdots = \frac{9}{1-\frac{1}{10}} = 90.$

- $a \neq 0$: Seja $\mathbf{A}_k = \{n \in \mathbb{N} : n$ tem k algarismos, mas n não tem o algarismo a na sua representação decimal$\}$.

  Neste caso $\mathbf{A}_k$ tem $8 \cdot 9^{k-1}$ elementos e $\mathbf{A} = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k$ (união disjunta) e se $x \in \mathbf{A}_k$, então $x \geqslant 10^{k-1}$.

  Assim segue que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{A}} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbf{A}_k} \frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8\cdot 9^{k-1}}{10^{k-1}} = 8 + \frac{8\cdot 9}{10} + \cdots = \frac{8}{1-\frac{1}{10}} = 80.$

(b) Vamos considerar apenas o caso $a \neq 0$, o caso $a = 0$ é análogo.

Temos que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{A}} \frac{1}{n^\alpha} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8\cdot 9^{k-1}}{10^{\alpha(k-1)}}$ é uma série geométrica de razão $\dfrac{9}{10^\alpha}$ que converge se $\alpha > \log_{10} 9$.

Agora note que se x tem k algarismos, então $x \leqslant 10^k - 1$ e assim

$$\sum_{n\in\mathbf{A}} \frac{1}{n^\alpha} \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8\cdot 9^{k-1}}{(10^k-1)^\alpha} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8\cdot 9^{k-1}}{10^{k\alpha}} \text{ é uma série geométrica de razão } \frac{9}{10^\alpha} \text{ que diverge se } \alpha \leqslant \log_{10} 9.$$

Portanto $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se $\alpha > \log_{10} 9$ e diverge se $\alpha \leqslant \log_{10} 9$. $\square$

Problema 2. Considere a sequência definida por $c_0 = 0, c_1 = 1$ e $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ para $n \geqslant 2$.

Encontre a função f tal que $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ e uma expressão para o termo geral c_n.

Solução: Escreveremos apenas f ao invés de $f(x)$. Como $c_2 = c_1 + c_0 = 1$ e $c_0 = 0$ começaremos a série em $k = 1$.

$$f = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k x^k \Rightarrow f = c_1 x + c_2 x^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} c_k x^k = x + x^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} [c_{k-1} + c_{k-2}]\, x^k = x + x^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} c_{k-1} x^k + \sum_{k=3}^{+\infty} c_{k-2} x^k$$

$$f = x + x^2 + \sum_{k=2}^{+\infty} c_k x^{k+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k x^{k+2} = x + x^2 + x \sum_{k=2}^{+\infty} c_k x^k + x^2 \sum_{k=1}^{+\infty} c_k x^k = x + x^2 + x(f - x) + x^2 f$$

Assim segue que $f = x + x^2 + x(f-x) + x^2 f \Rightarrow f = x + x^2 + xf - x^2 + x^2 f \Rightarrow (1 - x - x^2) f = x \Rightarrow f(x) = \dfrac{x}{1 - x - x^2}$.

A equação $x^2 - x - 1 = 0$ tem como soluções $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Note que $\alpha + \beta = 1, \alpha \cdot \beta = -1, \alpha - \beta = \sqrt{5}$ e assim $1 - x - x^2 = 1 - (\alpha+\beta)x + \alpha \cdot \beta x^2 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)$.

Além disso, $f(x) = \dfrac{x}{1 - x - x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left[\dfrac{1}{1 - \alpha x} - \dfrac{1}{1 - \beta x} \right]$.

Agora podemos usar a série geométrica para obter a série de potências de f:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{1 - \alpha x} - \frac{1}{1 - \beta x} \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} (\alpha x)^k - \sum_{k=0}^{+\infty} (\beta x)^k \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\alpha^k - \beta^k \right) x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}} \right) x^k$$

Portanto $c_k = \dfrac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}}$ para todo $k \geqslant 0$, onde $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Proposição: A sequência c_n satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $c_{n-1}c_{n+1} - c_n^2 = (-1)^n$, para todo $n \geqslant 1$.

(b) $c_{n+1}c_{n+2} - c_n c_{n+3} = (-1)^{n+1}$, para todo $n \geqslant 0$.

(c) $c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2 = c_n c_{n+1}$, para todo $n \geqslant 1$.

Solução: (a) De fato, para $n = 1$ temos que $c_{1-1}c_{1+1} - c_1^2 = c_0 c_2 - c_1^2 = 0 \cdot 1 - 1^2 = -1 = (-1)^1$.

Agora supõe que $c_{k-1}c_{k+1} - c_k^2 = (-1)^k$ vale para um certo $k \geqslant 1$. (**HI**)

Para $k+1$ temos que

$c_{k+1-1}c_{k+1+1} - c_{k+1}^2 = c_k c_{k+2} - c_{k+1}^2 = c_k(c_k + c_{k+1}) - c_{k+1}^2 = c_k^2 - c_{k+1}(c_{k+1} - c_k) = c_k^2 - c_{k+1}c_{k-1} \overset{\mathbf{HI}}{=}$

$-(c_{k-1}c_{k+1} - c_k^2) = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$. Portanto vale o resultado. $\square$

(b) Exercício.

(c) Para $n = 1$ temos que $c_1^2 = 1^2 = c_1 c_2$

Agora supõe que $c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_k^2 = c_k c_{k+1}$ vale para um certo $k \geqslant 1$. (**HI**)

Para $k+1$ temos que

$c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_k^2 + c_{k+1}^2 \overset{\mathbf{HI}}{=} c_k c_{k+1} + c_{k+1}^2 = c_{k+1}(c_k + c_{k+1}) = c_{k+1}c_{k+2}$.

Portanto vale o resultado. $\square$

Problema 3. Seja $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ a sequência de Fibonacci definida por $f_0 = 0, f_1 = 1$ e $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ para $n \geqslant 1$.

(a) Se $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k^2$, calcule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{S_n}$. (b) Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{f_n f_{n+2}}$. (c) Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{f_{2n}}$.

Solução: Vimos que $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$ para todo $n \geqslant 0$, onde $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\text{Logo } \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{\alpha^n} \cdot \frac{\alpha - \beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - \beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} = \frac{\alpha - 0}{1 - 0} = \alpha.$$

Então $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{1}{\alpha} = \beta$.

(a) Vimos acima que $S_n = f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$.

Para $m \geqslant n$, temos que $\sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{S_n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2}{f_n f_{n+1}} = \sum_{n=1}^{m} \left[\frac{f_{n-1}}{f_n} - \frac{f_n}{f_{n+1}}\right] =$

$$\left[\frac{f_0}{f_1} - \cancel{\frac{f_1}{f_2}}\right] + \left[\cancel{\frac{f_1}{f_2}} - \cancel{\frac{f_2}{f_3}}\right] + \left[\cancel{\frac{f_2}{f_3}} - \cancel{\frac{f_3}{f_4}}\right] + \cdots + \left[\cancel{\frac{f_{m-2}}{f_{m-1}}} - \cancel{\frac{f_{m-1}}{f_m}}\right] + \left[\cancel{\frac{f_{m-1}}{f_m}} - \frac{f_m}{f_{m+1}}\right] = \frac{f_0}{f_1} - \frac{f_m}{f_{m+1}} = \frac{0}{1} - \frac{f_m}{f_{m+1}} = -\frac{f_m}{f_{m+1}}$$

$$\text{Portanto } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{S_n} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{S_n} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{S_n} = \lim_{m\to\infty} -\frac{f_m}{f_{m+1}} = -\beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

(b) Para $m \geqslant n$, temos que $\sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n+1}}{f_n f_{n+2}} = \sum_{n=1}^{m} \frac{f_{n+1}f_{n+2} - f_n f_{n+3}}{f_n f_{n+2}} = \sum_{n=1}^{m} \left[\frac{f_{n+1}}{f_n} - \frac{f_{n+3}}{f_{n+2}}\right] =$

$$\left[\frac{f_2}{f_1} - \cancel{\frac{f_4}{f_3}}\right] + \left[\frac{f_3}{f_2} - \cancel{\frac{f_5}{f_4}}\right] + \left[\cancel{\frac{f_4}{f_3}} - \cancel{\frac{f_6}{f_5}}\right] + \left[\cancel{\frac{f_5}{f_4}} - \cancel{\frac{f_7}{f_6}}\right] + \left[\cancel{\frac{f_6}{f_5}} - \cancel{\frac{f_8}{f_7}}\right] + \left[\cancel{\frac{f_7}{f_6}} - \cancel{\frac{f_9}{f_8}}\right] + \left[\cancel{\frac{f_8}{f_7}} - \cancel{\frac{f_{10}}{f_9}}\right] + \cdots + \left[\cancel{\frac{f_{m-2}}{f_{m-3}}} - \cancel{\frac{f_m}{f_{m-1}}}\right]$$

$$+ \left[\cancel{\frac{f_{m-1}}{f_{m-2}}} - \cancel{\frac{f_{m+1}}{f_m}}\right] + \left[\cancel{\frac{f_m}{f_{m-1}}} - \frac{f_{m+2}}{f_{m+1}}\right] + \left[\cancel{\frac{f_{m+1}}{f_m}} - \frac{f_{m+3}}{f_{m+2}}\right] = \frac{f_2}{f_1} + \frac{f_3}{f_2} - \frac{f_{m+2}}{f_{m+1}} - \frac{f_{m+3}}{f_{m+2}} = 3 - \frac{f_{m+2}}{f_{m+1}} - \frac{f_{m+3}}{f_{m+2}}$$

$$\text{Portanto } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{f_n f_{n+2}} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n+1}}{f_n f_{n+2}} = \lim_{m\to\infty} \left[3 - \frac{f_{m+2}}{f_{m+1}} - \frac{f_{m+3}}{f_{m+2}}\right] - \frac{f_m}{f_{m+1}} = 3 - 2\alpha = 2 - \sqrt{5}.$$

(c) Usando a identidade $\arctan x - \arctan y = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$ e a parte (b) da Proposição acima segue que:

$$\arctan \frac{1}{f_{2n+1}} - \arctan \frac{1}{f_{2n+2}} = \arctan\left(\frac{f_{2n+2} - f_{2n+1}}{1 + f_{2n+1}f_{2n+2}}\right) = \arctan \frac{f_{2n}}{f_{2n}f_{2n+3}} = \arctan \frac{1}{f_{2n+3}}$$

$$\text{Logo } \sum_{n=0}^{m-1} \left[\arctan \frac{1}{f_{2n+1}} - \arctan \frac{1}{f_{2n+2}}\right] = \sum_{n=0}^{m-1} \arctan \frac{1}{f_{2n+3}}.$$

Para simplificar a notação seja $\arctan \frac{1}{f_p} = a_p$ e assim temos que: $\sum_{n=0}^{m-1} [a_{2n+1} - a_{2n+2}] = \sum_{n=0}^{m-1} a_{2n+3}$.

Então $[a_1 - a_2] + [a_3 - a_4] + [a_5 - a_6] + \cdots + [a_{2m-3} - a_{2m-2}] + [a_{2m-1} - a_{2m}] = a_3 + a_5 + a_7 + \cdots + a_{2m-1} + a_{2m+1}$.

Segue que $a_2 + a_4 + \cdots + a_m = a_1 - a_{2m+1}$.

$$\text{Portanto } \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{f_{2n}} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{f_{2n}} = \lim_{m\to\infty} \left[\arctan \frac{1}{f_1} - \arctan \frac{1}{f_{2m+1}}\right] = \frac{\pi}{4}.$$

Problema 4. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos divergente e $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

(a) Mostre que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{S_n S_{n-1}^{\beta}}$ converge se $\beta > 0$.

(b) Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ diverge se $\alpha \leqslant 1$ e converge se $\alpha > 1$.

(c) Se $S_n > 1$, para todo $n \geqslant 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n \ln S_n}$ diverge e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n \ln^{\alpha} S_n}$ converge se $\alpha > 1$.

Solução – Resolvido na SO os itens (a) e (b). No item (b) faltou $\alpha = 1$:

(a) Temos que $\frac{a_n}{S_n S_{n-1}^{\beta}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}^{\beta}}$.

Seja p um inteiro positivo tal que $\frac{1}{p} < \beta$. Como $\lim S_n = +\infty$, segue que existe n_0 tal que $n > n_0$ implica $S_{n-1} > 1$.

Logo temos que $\frac{a_n}{S_n S_{n-1}^{\beta}} < \frac{a_n}{S_n S_{n-1}^{1/p}}$ se $n > n_0$. Provaremos a convergência da série com termo geral $\frac{a_n}{S_n S_{n-1}^{1/p}}$.

Para isso precisaremos da desigualdade $\frac{a_n}{S_n S_{n-1}^{1/p}} \leqslant p\left(\frac{1}{S_{n-1}^{1/p}} - \frac{1}{S_n^{1/p}}\right)$ que é equivalente a $1 - \frac{S_{n-1}}{S_n} \leqslant p\left(1 - \frac{S_{n-1}^{1/p}}{S_n^{1/p}}\right)$.

Mas $1 - x^p \leqslant p(1-x)$ se $0 < x \leqslant 1$.

Fazendo $x = \left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)^{1/p}$ segue que $1 - \frac{S_{n-1}}{S_n} \leqslant p\left(1 - \frac{S_{n-1}^{1/p}}{S_n^{1/p}}\right)$.

Então temos que $\sum_{n=2}^{m} \frac{a_n}{S_n S_{n-1}^{1/p}} \leqslant p \sum_{n=2}^{m}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{1/p}} - \frac{1}{S_n^{1/p}}\right) =$

$$p\left[\left(\frac{1}{S_1^{1/p}} - \frac{1}{S_2^{1/p}}\right) + \left(\frac{1}{S_2^{1/p}} - \frac{1}{S_3^{1/p}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{S_{m-2}^{1/p}} - \frac{1}{S_{m-1}^{1/p}}\right) + \left(\frac{1}{S_{m-1}^{1/p}} - \frac{1}{S_m^{1/p}}\right)\right] = p\left(\frac{1}{S_1^{1/p}} - \frac{1}{S_m^{1/p}}\right)$$

Logo $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=2}^{m} \frac{a_n}{S_n S_{n-1}^{1/p}} \leqslant \lim_{m\to\infty} p\left(\frac{1}{S_1^{1/p}} - \frac{1}{S_m^{1/p}}\right) = \frac{p}{S_1^{1/p}}$.

Portanto a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{S_n S_{n-1}^{1/p}}$ converge e o mesmo vale para a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{S_n S_{n-1}^{\beta}}$.

(b) Vamos considerar os seguintes casos: $\alpha > 1, \alpha = 1$ e$\alpha < 1$.

Para $\alpha = 2$ apresentamos uma prova específica, mesmo já tendo sido provado o caso $\alpha > 1$.

$\boxed{\alpha > 1}$ Neste caso $\frac{a_n}{S_n^{\alpha}} \leqslant \frac{a_n}{S_n S_{n-1}^{\alpha-1}}$ para $n \geqslant 2$.

Pelo item(a) segue que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{S_n S_{n-1}^{\alpha-1}}$ converge, pois $\alpha - 1 > 0$.

Logo $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ converge e, portanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ também converge.

$\boxed{\alpha = 1}$ Vamos provar que $\dfrac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \dfrac{a_{n+2}}{S_{n+2}} + \dfrac{a_{n+3}}{S_{n+3}} + \cdots + \dfrac{a_{n+p}}{S_{n+p}} \geqslant 1 - \dfrac{S_n}{S_{n+p}}$.

De fato, $1 = \dfrac{S_{n+p}}{S_{n+p}} = \dfrac{S_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}}{S_{n+p}} = \dfrac{S_n}{S_{n+p}} + \dfrac{a_{n+1}}{S_{n+p}} + \dfrac{a_{n+2}}{S_{n+p}} + \cdots + \dfrac{a_{n+p}}{S_{n+p}} \leqslant$

$\dfrac{S_n}{S_{n+p}} + \dfrac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \dfrac{a_{n+2}}{S_{n+2}} + \cdots + \dfrac{a_{n+p}}{S_{n+p}}$.

Agora considere $T_m = \dfrac{a_1}{S_1} + \dfrac{a_2}{S_2} + \dfrac{a_3}{S_3} + \cdots + \dfrac{a_m}{S_m}$.

Vamos mostrar que T_m não é uma sequência de Cauchy e assim ela diverge e, portanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ diverge.

Dado $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, como $\lim S_n = +\infty$, segue que dado $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $S_{n_0+p} \geqslant 2S_{n_0}$, ou seja, $\dfrac{S_{n_0}}{S_{n_0+p}} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Logo temos que $|T_{n_0+p} - T_{n_0}| = \dfrac{a_{n_0+1}}{S_{n_0+1}} + \dfrac{a_{n_0+2}}{S_{n_0+2}} + \cdots + \dfrac{a_{n_0+p}}{S_{n_0+p}} \geqslant 1 - \dfrac{S_{n_0}}{S_{n_0+p}} \geqslant 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ e assim segue o resultado.

$\boxed{\alpha < 1}$ Neste caso temos que $S_n^\alpha < S_n$, então $\dfrac{1}{S_n^\alpha} < \dfrac{1}{S_n}$ e assim $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$. Portanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ diverge.

$\boxed{\alpha = 2}$ Vamos provar que $\dfrac{a_k}{S_k^2} \leqslant \dfrac{1}{S_{k-1}} - \dfrac{1}{S_k}$, se $k \geqslant 2$.

De fato, $a_k \leqslant a_k + \dfrac{a_k}{S_{k-1}} = 2a_k - a_k + \dfrac{a_k^2}{S_{k-1}} = 2a_k - (S_k - S_{k-1}) + \dfrac{a_k^2}{S_{k-1}} = 2a_k + S_{k-1} + \dfrac{a_k^2}{S_{k-1}} - S_k =$

$\dfrac{2a_k S_{k-1} + Sk - 1^2 + a_k^2}{S_{k-1}} - S_k = \dfrac{(S_{k-1} + a_k)^2}{S_{k-1}} - S_k = \dfrac{S_k^2}{S_{k-1}} - S_k$.

Logo $a_k \leqslant \dfrac{S_k^2}{S_{k-1}} - S_k$ e dividindo por S_k^2 segue que $\dfrac{a_k}{S_k^2} \leqslant \dfrac{1}{S_{k-1}} - \dfrac{1}{S_k}$, para todo $k \geqslant 2$.

Então segue que $T_m = \dfrac{a_1}{S_1^2} + \dfrac{a_2}{S_2^2} + \dfrac{a_3}{S_3^2} + \dfrac{a_4}{S_4^2} + \cdots + \dfrac{a_{m-1}}{S_{m-1}^2} + \dfrac{a_m}{S_m^2} \leqslant$

$\dfrac{a_1}{S_1^2} + \left[\dfrac{1}{S_1} - \dfrac{1}{S_2}\right] + \left[\dfrac{1}{S_2} - \dfrac{1}{S_3}\right] + \left[\dfrac{1}{S_3} - \dfrac{1}{S_4}\right] + \cdots + \left[\dfrac{1}{S_{m-2}} - \dfrac{1}{S_{m-1}}\right] + \left[\dfrac{1}{S_{m-1}} - \dfrac{1}{S_m}\right] = \dfrac{a_1}{S_1^2} + \dfrac{1}{S_1} - \dfrac{1}{S_m}$.

Como $S_1 = a_1$ temos que $0 \leqslant T_m \leqslant \dfrac{2}{a_1} - \dfrac{1}{S_m} \leqslant \dfrac{2}{a_1}$. Além disso, T_m é monótona.

Portanto T_m converge e assim a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ também converge.

(c) Temos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{a_{n+1}}{S_n \ln S_n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n \ln S_n} \geqslant \sum_{n=1}^{m} \int_{S_n}^{S_{n+1}} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln S_{m+1}) - \ln(\ln S_1)$

Logo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n \ln S_n} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{a_{n+1}}{S_n \ln S_n} \geqslant \lim_{m\to\infty} [\ln(\ln S_{m+1}) - \ln(\ln S_1)] = +\infty$ e portanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n \ln S_n}$ diverge.

Temos que $\displaystyle\sum_{n=2}^{m} \frac{a_n}{S_n \ln^\alpha S_n} = \sum_{n=2}^{m} \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n \ln^\alpha S_n} \leqslant \sum_{n=2}^{m} \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x \ln^\alpha x} dx = \frac{1}{(-\alpha+1)(\ln S_m)^{\alpha-1}} + \frac{1}{(\alpha-1)(\ln S_1)^{\alpha-1}}$

Logo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n \ln^\alpha S_n} = \frac{1}{\ln^\alpha a_1} + \lim_{m\to\infty} \sum_{n=2}^{m} \frac{a_n}{S_n \ln^\alpha S_n} \leqslant \frac{1}{\ln^\alpha a_1} + \lim_{m\to\infty} \left[\frac{1}{(-\alpha+1)(\ln S_m)^{\alpha-1}} + \frac{1}{(\alpha-1)(\ln S_1)^{\alpha-1}}\right]$.

Portanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n \ln^\alpha S_n} \leqslant \frac{1}{\ln^\alpha a_1} + \frac{1}{(\alpha-1)(\ln a_1)^{\alpha-1}}$ e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n \ln^\alpha S_n}$ converge.

Problema 5. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos convergente e $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

Mostre que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}^{\alpha}}$ converge se $\alpha < 1$ *e* diverge se $\alpha \geqslant 1$.

Solução: Iniciamos considerando dois casos particulares: $\alpha = 1$ e $\alpha = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\alpha = 1}$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}}$ Note que a sequência r_n é decrescente e $\lim r_n = 0$. Além disso, $\frac{a_n}{r_{n-1}} = \frac{r_{n-1} - r_n}{r_{n-1}}$.

Logo para quaisquer inteiros positivos n e p temos que

$$\frac{a_{n+1}}{r_n} + \frac{a_{n+2}}{r_{n+1}} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{r_{n+p-1}} = \frac{r_n - r_{n+1}}{r_n} + \frac{r_{n+2} - r_{n+1}}{r_{n+1}} + \cdots + \frac{r_{n+p-1} - r_{n+p}}{r_{n+p-1}} >$$

$$\frac{r_n - r_{n+1}}{r_n} + \frac{r_{n+2} - r_{n+1}}{r_n} + \cdots + \frac{r_{n+p-1} - r_{n+p}}{r_n} = \frac{r_n - r_{n+p}}{r_n} = 1 - \frac{r_{n+p}}{r_n}.$$

Fixado n temos que $\lim_{p\to\infty} \left(1 - \frac{r_{n+p}}{r_n}\right) = 1$ e assim $T_m = \sum_{n=2}^{m} \frac{a_n}{r_{n-1}}$ não é de Cauchy e então a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}}$ diverge.

$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}}$ Pela desigualdade das médias aritmética e geométrica temos que $\sqrt{r_{n-1} r_n} < \frac{r_{n-1} + r_n}{2}$

e assim $2\sqrt{r_{n-1} r_n} < r_{n-1} + r_n$, ou seja, $-(r_{n-1} + r_n) < -2\sqrt{r_{n-1} r_n}$.

Logo temos que

$$a_n = r_{n-1} - r_n = 2r_{n-1} - r_{n-1} + r_n = 2r_{n-1} - (r_{n-1} - r_n) < 2r_{n-1} - 2\sqrt{r_{n-1} r_n} = 2\sqrt{r_{n-1}}(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}).$$

Então $\frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}} < 2(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n})$. Agora vemos que

$$T_m = \sum_{n=2}^{m} \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}} = \frac{a_2}{\sqrt{r_1}} + \frac{a_3}{\sqrt{r_2}} + \frac{a_4}{\sqrt{r_3}} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{\sqrt{r_{m-2}}} + \frac{a_m}{\sqrt{r_{m-1}}} <$$

$$2(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2}) + 2(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_3}) + 2(\sqrt{r_3} - \sqrt{r_4}) + \cdots + 2(\sqrt{r_{m-2}} - \sqrt{r_{m-1}}) + 2(\sqrt{r_{m-1}} - \sqrt{r_m}) = 2(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_m})$$

Logo $\lim_{m\to\infty} T_m = \sum_{n=2}^{m} \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}} \leqslant \lim_{m\to} [2(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_m})] = 2\sqrt{r_1}$ e assim a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}}$ converge e $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}} \leqslant 2\sqrt{r_1}$.

Agora vamos considerar os casos $\alpha \geqslant 1$ e $\alpha < 1$.

$\boxed{\alpha \geqslant 1}$ Como $\lim r_n = 0$, existe n_0 tal que $k > n_0 \Rightarrow r_k < 1$. Logo $r_k^{\alpha} < r_k$ se $k > n_0$.

Assim segue que se $k > n_0$, então $\frac{1}{r_k^{\alpha}} > \frac{1}{r_k}$.

Portanto $\sum_{n=n_0+2}^{\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}^{\alpha}} > \sum_{n=n_0+2}^{\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}} = \infty \Rightarrow \sum_{n=n_0+2}^{\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}^{\alpha}}$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}^{\alpha}}$ diverge.

$\boxed{\alpha < 1}$ Então existe um inteiro positivo p tal que $\alpha < 1 - \frac{1}{p}$.

Como $\lim r_n = 0$, existe n_0 tal que $k > n_0 \Rightarrow r_k < 1$. Logo $r_k^{1-1/p} < r_k^{\alpha}$ se $k > n_0$.

Assim segue que se $k > n_0$, então $\frac{1}{r_k^{\alpha}} < \frac{1}{r_k^{1-1/p}}$. Se $n > n_0 + 1$, então $\frac{a_n}{r_{n-1}^{\alpha}} < \frac{a_n}{r_{n-1}^{1-1/p}} = \frac{r_{n-1} - r_n}{r_{n-1}} \cdot r_{n-1}^{1/p}$.

Se $0 < x \leqslant 1$, então $1 - x^p \leqslant p(1-x)$ e usando $x = \left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^{1/p}$ obtemos $\frac{a_n}{r_{n-1}^{\alpha}} \leqslant p\left(r_{n-1}^{1/p} - r_n^{1/p}\right)$.

Então $\sum_{n=n_0+2}^{m} \frac{a_n}{r_{n-1}^{\alpha}} \leqslant \sum_{n=n_0+2}^{m} p\left(r_{n-1}^{1/p} - r_n^{1/p}\right) = \ldots = p\left(r_{n_0+1}^{1/p} - r_m^{1/p}\right)$

Portanto $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=n_0+2}^{m} \frac{a_n}{r_{n-1}^{\alpha}} \leqslant \lim_{m\to\infty} p\left(r_{n_0+1}^{1/p} - r_m^{1/p}\right) = p\, r_{n_0+1}^{1/p} \Rightarrow \sum_{n=n_0+2}^{\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}^{\alpha}}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}^{\alpha}}$ converge .

Problema 6 – Desigualdade de Carleman.

Mostre que se $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de números reais positivos, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_1 \cdots a_n} < e \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Solução: Lembre que $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$, para todo $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

Seja $c_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}} = n\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$, para $n \in \mathbb{N}$.

Então $c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \dots \cdot c_{n_1} \cdot c_n = \dfrac{(1+1)^1}{1^{1-1}} \cdot \dfrac{(2+1)^2}{2^{2-1}} \cdot \dfrac{(3+1)^3}{3^{3-1}} \cdot \dots \cdot \dfrac{(n)^{n-1}}{(n-1)^{n-2}} \cdot \dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}} = (n+1)^n$ e $\dfrac{c_n}{n} < e$.

Pela desigualdade das médias aritmética e geométrica temos que

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} = \frac{1}{n+1}\sqrt[n]{a_1 c_1 \cdot \dots \cdot a_n c_n} \leqslant \frac{a_1 c_1 + \cdots + a_n c_n}{n(n+1)}.$$

Logo temos que

$$\sum_{n=1}^{N} \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{a_1 c_1 + \cdots + a_n c_n}{n(n+1)} =$$

$$a_1 c_1 \left[\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{N(N+1)}\right] + a_2 c_2 \left[\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{N(N+1)}\right] + \cdots + a_N c_N \frac{1}{N(N+1)} <$$

$$< a_1 c_1 + \frac{1}{2} a_2 c_2 + \frac{1}{3} a_3 c_3 + \cdots + \frac{1}{N} a_N c_N = 2a_1 + a_2 \frac{c_2}{2} + a_3 \frac{c_3}{3} + \cdots + a_n \frac{C_N}{N} < 2a_1 + ea_2 + ea_3 + \cdots + ea_N.$$

Logo $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} [2a_1 + ea_2 + ea_3 + \cdots + ea_N] = 2a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} ea_n$.

Portanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leqslant 2a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} ea_n < ea_1 + \sum_{n=2}^{\infty} ea_n = e\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

Problema 7 – Regra de L'Hôpital Discreta.

(a) Prove que se A_n é crescente e $\lim A_n = +\infty$ e se $\lim \dfrac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = L$, então $\lim \dfrac{a_n}{A_n} = L$.

(b) Use o item (a) para deduzir que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1$.

Solução – Resolvido (b) na SO: Seja $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n}$. Vamos mostrar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A_n} = L$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que se $n > N$, então $L - \varepsilon < \dfrac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} < L + \varepsilon$.

Então temos que $(L - \varepsilon)(A_{n+1} - A_n) < a_{n+1} - a_n < (L + \varepsilon)(A_{n+1} - A_n)$, para todo $n \geqslant N$.

Logo $a_n + (L - \varepsilon)(A_{n+1} - A_n) < a_{n+1} < a_n + (L + \varepsilon)(A_{n+1} - A_n)$, para todo $n \geqslant N$.

Aplicando várias vezes a desigualdade da direita obtemos

$a_n < a_{n-1} + (L+\varepsilon)(A_n - A_{n-1}) < a_{n-2} + (L+\varepsilon)(A_{n-1} - A_{n-2}) + (L+\varepsilon)(A_n - A_{n-1}) = a_{n-2} + (L+\varepsilon)(A_n - A_{n-2}) <$
$a_{n-3} + (L+\varepsilon)(A_{n-2} - A_{n-3}) + (L+\varepsilon)(A_n - A_{n-2}) = a_{n-3} + (L+\varepsilon)(A_n - A_{n-3}) < \ldots < a_N + (L+\varepsilon)(A_n - A_N)$.

De modo análogo podemos obter $a_N + (L - \varepsilon)(A_n - A_N) < a_n$, para todo $n \geqslant N$.

Juntando esses dois fatos temos $a_N + (L - \varepsilon)(A_n - A_N) < a_n < a_N + (L + \varepsilon)(A_n - A_N)$, para todo $n \geqslant N$.

Dividindo tudo por A_n segue que $\dfrac{a_N}{A_n} + (L - \varepsilon)\left(1 - \dfrac{A_N}{A_n}\right) < \dfrac{a_n}{A_n} < \dfrac{a_N}{A_n} + (L + \varepsilon)\left(1 - \dfrac{A_N}{A_n}\right)$, para todo $n \geqslant N$.

Como $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A_n = +\infty$ temos que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_N}{A_n} + (L-\varepsilon)\left(1 - \frac{A_N}{A_n}\right) = L - \varepsilon$ e $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_N}{A_n} + (L+\varepsilon)\left(1 - \frac{A_N}{A_n}\right) = L + \varepsilon$.

Logo existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$\dfrac{a_N}{A_n} + (L - \varepsilon)\left(1 - \dfrac{A_N}{A_n}\right) > L - 2\varepsilon$, para todo $n \geqslant N_1$ e
$\dfrac{a_N}{A_n} + (L + \varepsilon)\left(1 - \dfrac{A_N}{A_n}\right) < L + 2\varepsilon$, para todo $n \geqslant N_2$.

Seja $N_3 = \max\{N, N_1, N_2\}$. Então $L - 2\varepsilon < \dfrac{a_n}{A_n} < L + 2\varepsilon$, para todo $n \geqslant N_3$.

Portanto $\lim \dfrac{a_n}{A_n} = L$. $\square$

(b) Sejam $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ e $A_n = \log n$, onde log é o logaritmo natural.

Então temos que A_n é estritamente crescente, $\lim A_n = +\infty$ e lembrando que $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\log(n+1) - \log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \frac{1}{n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \frac{1}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = 1.$$

Usando o item (a) temos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log n} = 1$.

Problema 8 – Teste de Condensação de Cauchy. Seja (a_n) uma sequência decrescente com $\lim a_n = 0$.

(a) Prove que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se, e somente se, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$ converge.

(b) Use o item (a) para provar que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leqslant 1$.

(c) Use os itens (a) e (b) para provar que a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leqslant 1$.

Solução:

(a) $\boxed{\Longrightarrow}$ Suponhamos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Sejam $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e $M > 0$ tal que $S_n \leqslant M$, para todo n.

Como (a_n) é decrescente temos que

$$
\begin{aligned}
2a_4 &\leqslant a_3 + a_4 \\
4a_8 &\leqslant a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \\
8a_{16} &\leqslant a_9 + a_{10} + \cdots + a_{16} \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

Somando as $n-1$ primeiras desigualdades e depois somando a_2 em ambos os lados, obtemos

$$a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{n-1}a_{2^n} \leqslant a_2 + a_3 + \cdots + a_{2^n} \leqslant M.$$

Multiplicando por 2 e depois somando a_1 dos dois lados, temos

$$a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots + 2^n a_{2^n} \leqslant a_1 + 2M, \text{ para todo } n.$$

Como a sequência das somas parciais é limitada, segue que a série de termos positivos $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots$ converge.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Suponhamos que $a_n \downarrow 0$ e $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots < \infty$.

Seja $M > 0$ tal que $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots + 2^n a_{2^n} \leqslant M$, para todo n.

Como (a_n) é decrescente segue que

$$
\begin{aligned}
a_2 + a_3 &\leqslant 2a_2 \\
a_4 + a_5 + a_6 + a_7 &\leqslant 4a_4 \\
a_8 + a_9 + \cdots + a_{15} &\leqslant 8a_8 \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

Logo temos que $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2^n - 1} \leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^{n-1}a_{2^{n-1}} \leqslant M$, para todo n.

Segue que a sequência das somas parciais $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ é não decrescente e tem uma subsequência limitada.

Assim temos que (S_n) é não decrescente e limitada, o que implica que é convergente. Portanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. $\square$

(b) Se $p \leqslant 0$, então $\dfrac{1}{n^p} \nrightarrow 0$ e, neste caso, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge.

Se $p > 0$ temos que a sequência $a_n = \dfrac{1}{n^p}$ é decrescente e tem limite zero.

Neste caso podemos aplicar o resultado do item (a) e observando que $a_{2^n} = \dfrac{1}{(2^n)^p} = \dfrac{1}{2^{np}}$, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge se, e somente se, } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{np}} \text{ converge.}$$

Mas, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{np}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{np-n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $\dfrac{1}{2^{p-1}}$ que converge se, e somente se,

$\dfrac{1}{2^{p-1}} \in (-1, 1)$, ou seja, converge apenas nos casos em que $2^{p-1} > 1$, isto é, se $p > 1$.

Portanto a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leqslant 1$. $\square$

(c) Se $p \leqslant 0$, então $\dfrac{1}{n(\log n)^p} \nrightarrow 0$ e, neste caso, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ diverge.

Se $p > 0$ temos que a sequência $a_n = \dfrac{1}{n(\log n)^p}$ é decrescente e tem limite zero. Neste caso podemos aplicar o resultado do item (a) e observando que $a_{2^n} = \dfrac{1}{2^n(\log 2^n)^p} = \dfrac{1}{2^n(n \log 2)^p} = \dfrac{1}{2^n(\log 2)^p n^p}$, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge se, e somente se, } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n(\log 2)^p n^p} \text{ converge.}$$

Mas, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n(\log 2)^p n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log 2)^p n^p} = \frac{1}{(\log 2)^p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ que converge se $p > 1$ e diverge se $p \leqslant 1$.

Portanto a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leqslant 1$. $\square$

Problema 9 – Teorema de Schlömilch. Se g_k é um sequência de inteiros positivos estritamente crescente tal que para algum $c > 0$ e para todo $k \in \mathbb{N}, g_{k+1} - g_k \leqslant c\,(g_k - g_{k-1})$ e se a_n é uma sequência de termos positivos estritamente decrescente, então

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge se, e somente se, } \sum_{n=1}^{+\infty} (g_{n+1} - g_n) a_{g_n} \text{ converge.}$$

Solução: O raciocínio será semelhante ao utilizado no Teste de Condensação de Cauchy.

Lembre que $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e $T_k = (g_2 - g_1)a_{g_1} + (g_3 - g_2)a_{g_2} + \cdots + (g_{k+1} - g_k)a_{g_k}$.

Então temos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (g_{n+1} - g_n)a_{g_n} = \lim_{k\to\infty} T_k$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supõe que $\sum a_n$ converge e que $\sum a_n = \lim S_n = S$. Se $n > g_k$, então segue que

$cS_n \geqslant cS_{g_k} \geqslant c(a_{g_1+1} + \cdots + a_{g_2}) + c(a_{g_2+1} + \cdots + a_{g_3}) + \cdots + c(a_{g_{k-1}+1} + \cdots + a_{g_k}) \geqslant$

$c(g_2 - g_1)a_{g_2} + c(g_3 - g_2)a_{g_3} + \cdots + c(g_k - g_{k-1})a_{g_k} \geqslant (g_3 - g_2)a_{g_2} + c(g_4 - g_3)a_{g_3} + \cdots + c(g_{k+1} - g_k)a_{g_k}$.

Logo $(g_3 - g_2)a_{g_2} + c(g_4 - g_3)a_{g_3} + \cdots + c(g_{k+1} - g_k)a_{g_k} \leqslant cS_n$.

Somando $(g_2 - g_1)a_{g_1}$ dos dois lados temos que

$(g_2 - g_1)a_{g_1} + (g_3 - g_2)a_{g_2} + c(g_4 - g_3)a_{g_3} + \cdots + c(g_{k+1} - g_k)a_{g_k} \leqslant (g_2 - g_1)a_{g_1} + cS_n$.

Assim segue que $T_k \leqslant (g_2 - g_1)a_{g_1} + cS_n$.

Mas, $k \to \infty \Rightarrow g_k \to \infty \Rightarrow n \to \infty \Rightarrow \displaystyle\lim_{k\to\infty} T_k \leqslant \lim_{n\to\infty} [(g_2 - g_1)a_{g_1} + cS_n] \Rightarrow \lim_{k\to\infty} T_k \leqslant (g_2 - g_1)a_{g_1} + cS$.

Portanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (g_{n+1} - g_n)a_{g_n}$ converge.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supõe que $\sum (g_{n+1} - g_n)a_{g_n}$ converge e que $\sum (g_{n+1} - g_n)a_{g_n} = \lim T_k = T$. Se $n \leqslant g_k$ temos que

$S_n \leqslant S_{g_k} \leqslant (a_1 + \cdots + a_{g_1-1}) + (a_{g_1} + \cdots + a_{g_2-1}) + (a_{g_2} + \cdots + a_{g_3-1}) + \cdots + (a_{g_k} + \cdots + a_{g_{k+1}-1}) \leqslant$

$(a_1 + \cdots + a_{g_1-1}) + (g_2 - g_1)a_{g_1} + (g_3 - g_2)a_{g_2} + \cdots + (g_{k+1} - g_k)a_{g_k}$.

Assim segue que $S_n \leqslant (a_1 + \cdots + a_{g_1-1}) + T_k$.

Mas, $n \to \infty \Rightarrow g_k \to \infty \Rightarrow k \to \infty \Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n \leqslant \lim_{k\to\infty} [(a_1 + \cdots + a_{g_1-1}) + T_k] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n \leqslant (a_1 + \cdots + a_{g_1-1}) + T$.

Portanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. $\square$

Abaixo temos alguns exemplos de sequências g_k, conforme resultado acima.

Proposição: Seja (a_n) uma sequência de números positivos decrescente.

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, as série abaixo também convergem:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^n a_{3^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_{n^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_{n^3}$.

(a) Neste caso podemos aplicar o Teorema de Schlömilch para $g_k = 3^k, c = 3, g_{n+1} - g_n = 2 \cdot 3^n$ e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge } \iff \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \cdot 3^n a_{3^n} \text{ converge } \iff \sum_{n=1}^{+\infty} 3^n a_{3^n} \text{ converge.}$$

(b) Neste caso podemos aplicar o Teorema de Schlömilch para $g_k = k^2, c = 3, g_{n+1} - g_n = 2n + 1$ e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge } \iff \sum_{n=1}^{+\infty} (2n+1) a_{n^2} \text{ converge } \iff \sum_{n=1}^{+\infty} n a_{n^2} \text{ converge, pois } \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)a_{n^2}}{n a_{n^2}} = 2.$$

(c) Neste caso podemos aplicar o Teorema de Schlömilch para $g_k = k^3, c = 7, g_{n+1} - g_n = 3n^2 + 3n + 1$ e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge } \iff \sum_{n=1}^{+\infty} (3n^2 + 3n + 1) a_{n^3} \text{ converge } \iff \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_{n^3} \text{ converge, pois } \lim_{n\to\infty} \frac{(3n^2+3n+1)a_{n^3}}{n^2 a_{n^3}} = 3.$$

Problema 10 – IMC 2010. Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ definida recursivamente por $x_1 = \sqrt{5}$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2$, se $n \geqslant 1$.

Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}}$.

Solução: Seja $y_n = x_n^2$. Então $y_{n+1} = x_{n+1}^2 = (x_n^2 - 2)^2 = (y_n - 2)^2$ e assim $y_{n+1} - 4 = y_n(y_n - 4)$.

Como $y_2 = x_2^2 = (x_1^2 - 2)^2 = (5-2)^2 = 9 > 5$, temos $y_3 = (y_2 - 2)^2 > 5$ e podemos mostrar que $y_n > 5$ se $n \geqslant 2$.

Logo temos que $y_{n+1} - y_n = y_n(y_n - 4) + 4 - y_n = y_n^2 - 5y_n + 4 = y_n(y_n - 5) + 4 > 4$, para $n \geqslant 2$.

Então $\lim y_n = +\infty$. Como $\dfrac{y_k}{y_{k+1} - 4} = \dfrac{1}{y_k - 4}$ para todo $k \geqslant 1$ temos que

$$\left(\frac{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}}\right)^2 = \frac{y_1 \cdot y_2 \cdots y_n}{y_{n+1}} = \frac{y_{n+1} - 4}{y_{n+1}} \cdot \frac{y_1 \cdot y_2 \cdots y_n}{y_{n+1} - 4} = \frac{y_{n+1} - 4}{y_{n+1}} \cdot \frac{y_1 \cdot y_2 \cdots y_{n-1}}{y_n - 4} =$$

$$\frac{y_{n+1} - 4}{y_{n+1}} \cdot \frac{y_1 \cdot y_2 \cdots y_{n-2}}{y_{n-1} - 4} = \cdots = \frac{y_{n+1} - 4}{y_{n+1}} \cdot \frac{y_1}{y_2 - 4} = \frac{y_{n+1} - 4}{y_{n+1}} \cdot \frac{1}{y_1 - 4} = \frac{y_{n+1} - 4}{y_{n+1}} \cdot \frac{1}{5 - 4} = \frac{y_{n+1} - 4}{y_{n+1}}$$

Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, segue que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1} - 4}{y_{n+1}} = 1$ e, portanto, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}} = 1$. $\square$

Problema 11 – IMC 2011. Seja $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ uma sequência com $\dfrac{1}{2} < a_n < 1$ para todo $n \geqslant 0$.

Defina a sequência $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ por $x_0 = a_0, x_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1}x_n}$ $(n \geqslant 0)$.

Quais são os possíveis valores de $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$? Essa sequência pode ser divergente?

Solução: Provaremos, por indução, que $0 < 1 - x_n < \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Com isso teremos que $(1 - x_n) \to 0$ e assim $x_n \to 1$.

Para $n = 0$ temos que $\dfrac{1}{2} < x_0 < 1$, pois $x_0 = a_0$ e $\dfrac{1}{2} < a_n < 1$, para todo $n \geqslant 0$.

Agora supõe que o resultado vale até um certo $n \geqslant 0$, ou seja, $0 < 1 - x_n < \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

Além disso, observe que $\dfrac{1 - a_{n+1}}{1 + a_{n+1}x_n} < \dfrac{1 - \frac{1}{2}}{1 + 0} = \dfrac{1}{2}$.

Então temos que

$$1 - x_{n+1} = 1 - \frac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1}x_n} = \frac{1 + a_{n+1}x_n - a_{n+1} - x_n}{1 + a_{n+1}x_n} = \frac{1 - a_{n+1}}{1 + a_{n+1}x_n}(1 - x_n) < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Portanto x_n converge e $\lim x_n = 1$. $\square$

Problema 12 – IMC 2012. Considere a sequência definida por $a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}$ e $a_{n+1} = \frac{na_n^2}{1+(n+1)a_n}$, se $n \geqslant 1$. Prove que a série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ converge e determine sua soma.

Solução: Observe que $ka_k = \frac{[1+(k+1)a_k]a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{k+1}}{a_k} + (k+1)a_{k+1}$, para $k \geqslant 1$. Então temos que:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_1}{a_0} + \sum_{k=1}^{n} [ka_k - (k+1)a_{k+1}] = \frac{1}{2} + [a_1 - 2a_2] + [2a_2 - 3a_3] + [3a_3 - 4a_4] + [4a_4 - 5a_5] + \cdots +$$

$$[(n-1)a_{n-1} - na_n] + [na_n - (n+1)a_{n+1}] = \frac{1}{2} + a_1 - (n+1)a_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - (n+1)a_{n+1} = 1 - (n+1)a_{n+1}.$$

Logo $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ e como os termos desta série são todos positivos segue que ela converge.

Assim segue que a sequência $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge para zero e assim temos que existe n_0 tal que $n \geqslant n_0$ implica $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}$, ou seja, $a_{n+1} < \frac{a_n}{2}$.

Então temos que $a_n < \frac{a_{n_0}}{2^{n-n_0}}$, para todo $n > n_0$ e assim $na_n < \frac{na_{n_0}}{2^{n-n_0}}$ para todo $n > n_0$.

Logo $0 \leqslant \lim na_n \leqslant \lim \frac{na_{n_0}}{2^{n-n_0}} = 0$ e assim $\lim na_n = 0$.

Portanto $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{n\to\infty} [1 - (n+1)a_{n+1}] = 1 - 0 = 1$.□

Problema 13. Qual é a condição que os números reais positivos a, b e c devem satisfazer para que a série convirja?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{a}-\frac{\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{2}\right)$$

Solução: Lembre que $\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{\ln(1+x)}{x}<1$ se $x>0$.

Usando o resultado acima podemos provar que se $a>0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)=\ln a$.

Considere $a>1$ e a sequência $a_n=\sqrt[n]{a}-1$.

Então $a_n>0$ e fazendo $x=a_n$ nas inequações acima segue que: $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}<\dfrac{\ln(\sqrt[n]{a})}{\sqrt[n]{a}-1}<1$.

Como $\lim \sqrt[n]{a}=1$ segue, pelo teorema do confronto, que $\lim \dfrac{\ln(\sqrt[n]{a})}{\sqrt[n]{a}-1}=1$.

Mas $\ln(\sqrt[n]{a})=\dfrac{\ln a}{n}$ e assim $\lim \dfrac{\ln a}{n(\sqrt[n]{a}-1)}=1$.

Portanto $\lim \dfrac{1}{n(\sqrt[n]{a}-1)}=\dfrac{1}{\ln a}$ e assim $\lim n(\sqrt[n]{a}-1)=\ln a$.

O caso $0<a<1$ pode ser feito de modo similar.

Considere três números reais positivos a, b e c. Então

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-\dfrac{\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{2}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\dfrac{1}{n}}-\frac{\sqrt[n]{b}-1+\sqrt[n]{c}-1}{\dfrac{2}{n}}\right)=\ln a-\frac{1}{2}(\ln b+\ln c)=\ln\frac{a}{\sqrt{bc}}.$$

Se $a>\sqrt{bc}$ então os termos da série em estudo são positivos a partir de um certo termo e diverge, por comparação com a série harmônica $\sum\dfrac{1}{n}$.

Se $a<\sqrt{bc}$ então os termos da série em estudo são negativos a partir de um certo termo e diverge, por comparação com a série $\sum\left(-\dfrac{1}{n}\right)$.

Agora se $a=\sqrt{bc}$ temos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{a}-\frac{\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{2}\right)=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[2n]{b}-\sqrt[2n]{c}\right)^2$.

Já que $\lim\left(\dfrac{\sqrt[2n]{b}-1-\sqrt[2n]{c}+1}{\dfrac{1}{2n}}\right)^2=(\ln b-\ln c)^2$, a série converge por comparação com a série $\sum\dfrac{1}{n^2}$. $\square$

Problema 14 – IMC 2014. Considere a sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (1,\, 1,\, 2,\, 1,\, 2,\, 3,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 1,\, \ldots)$.

Encontre todos os pares de números reais positivos (α, β) tais que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n^\alpha} = \beta$, onde $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Solução: Lembre que $t_k = 1 + 2 + \cdots + k = \dfrac{k(k+1)}{2} = \dbinom{k+1}{2}$.

Além disso, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_k = \sum_{k=1}^{n} \binom{k+1}{2} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3}$. $\star$

De fato, considere o conjunto $A = \{\,1,\, 2,\, \ldots,\, n{+}1,\, n{+}2\,\}$. Então A possui $\dbinom{n+2}{3}$ subconjuntos com 3 elementos.

Agora calcule os subconjuntos de A com 3 elementos em que: n é o menor elemento; $n-1$ é o menor elemento;...; 2 é o menor elemento; 1 é o menor elemento e obtenha o lado esquerdo da igualdade $\star$.

Note que a_{t_n} é a primeira vez que n aparece na sequência a_n.

Vamos calcular o limite de uma subsequência de $b_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n^\alpha}$:

$$b_{t_n} := \frac{\sum_{k=1}^{t_n} a_k}{t_n^\alpha} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k}{t_n^\alpha} = \frac{\binom{n+2}{3}}{\binom{n+1}{2}^\alpha} = \frac{\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}}{\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^\alpha} = \frac{2^\alpha n^3(1+1/n)(1+2/n)}{6n^{2\alpha}(1+1/n)^\alpha}.$$

O limite da subsequência b_{t_n} existe e é finito se, e somente se, $2\alpha = 3$, ou seja, $\alpha = \dfrac{3}{2}$ e neste caso $\lim_n b_{t_n} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Logo $(\alpha,\, \beta) = \left(\dfrac{3}{2},\, \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$ é o único par candidato à solução do problema e provaremos que é de fato a solução.

Seja t um inteiro positivo no intervalo $[\,t_n + 1,\, t_{n+1}\,]$, ou seja, $t = t_n + m$ para algum $1 \leqslant m \leqslant n+1$.

Então temos que $b_t = \dfrac{\binom{n+2}{3} + \binom{m+1}{2}}{\left[\binom{n+1}{2} + m\right]^{3/2}}$ e então $\dfrac{\binom{n+2}{3}}{\left[\binom{n+1}{2} + n + 1\right]^{3/2}} \leqslant b_t \leqslant \dfrac{\binom{n+2}{3} + \binom{n+2}{2}}{\left[\binom{n+2}{2} + 1\right]^{3/2}}$.

Logo

$$\frac{\dfrac{n^3}{6}(1+1/n)(1+2/n)}{\dfrac{n^3}{2^{3/2}}\left[1 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{2}{n^2}\right]^{3/2}} \leqslant b_t \leqslant \frac{\dfrac{n^3}{6}\left[(1+1/n)(1+2/n) + 3(1/n + 3/n^2 + 2/n^3)\right]}{\dfrac{n^3}{2^{3/2}}\left[1 + 3/n + 2/n^2\right]^{3/2}}.$$

Como os extremos das inequações acima tem limite $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ segue que $\lim b_n = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. $\square$

Problema 15 – IMC 2015. Considere a sequência $F(0) = 0, F(1) = \dfrac{3}{2}$ e $F(n) = \dfrac{5}{2}F(n-1) - F(n-2)$, se $n \geqslant 2$.

A soma da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F(2^n)}$ é um número racional?

Solução: A equação característica da recorrência é $x^2 = \dfrac{5}{2}x - 1$ cujas raízes são $x_1 = 2$ e $x_2 = \dfrac{1}{2} = 2^{-1}$.

Logo $F(n) = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 2^{-n}$. Como $F(0) = 0$ e $F(1) = \dfrac{3}{2}$ segue que $C_1 = 1$ e $C_2 = -1$ e assim $F(n) = 2^n - 2^{-n}$.

Se $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, então pode ser escrito de modo único na forma $m = 2^n(2k+1)$, com $n, k \in \mathbb{Z}, n \geqslant 0, k \geqslant 0$.

Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F(2^n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2^n} - 2^{-2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2^n}} \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}\right]^k =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k\cdot 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n(2k+1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 1. \quad \square$$

Problema 16 – IMC 2016.

Seja $(x_1, x_2, \ldots)$ uma sequência de números reais positivos satisfazendo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2n-1} = 1$.

Prove que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} \frac{x_n}{k^2} \leqslant 2$.

Solução: Trocando a ordem dos somatórios temos que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} \frac{x_n}{k^2} = \sum_{1\leqslant n \leqslant k} \frac{x_n}{k^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right).$$

Além disso,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{k - \frac{1}{2}} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}}\right) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n}^{m} \left(\frac{1}{k - \frac{1}{2}} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}}\right) =$$

$$\lim_{m\to\infty} \left[\left(\frac{1}{n - \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}}\right) + \left(\frac{1}{n + \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{3}{2}}\right) + \left(\frac{1}{n + \frac{3}{2}} - \frac{1}{n + \frac{5}{2}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m - \frac{3}{2}} - \frac{1}{m - \frac{1}{2}}\right) + \left(\frac{1}{m - \frac{1}{2}} - \frac{1}{m + \frac{1}{2}}\right)\right] =$$

$$\lim_{m\to\infty} \left[\frac{1}{n - \frac{1}{2}} - \frac{1}{m + \frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{n - \frac{1}{2}} = \frac{2}{2n-1}.$$

Assim temos que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} \frac{x_n}{k^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n \frac{2}{2n-1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{2n-1} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2n-1} = 2\cdot 1 = 2.$ $\square$

Problema 17 – IMC 2015. Prove que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < 2.$

Solução: Pela desigualdade das médias aritmética e geométrica temos que $\sqrt{n(n+1)} < \dfrac{n+(n+1)}{2}$.

Logo $1 < 2(n+1) - 2\sqrt{n(n+1)}$ e dividindo por $\sqrt{n}(n+1)$ segue que $\dfrac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < \dfrac{2}{\sqrt{n}} - \dfrac{2}{\sqrt{n+1}}$.

Mas $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < \sum_{n=1}^{m} \left[\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}}\right] \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}}\right].$

Note que

$$\sum_{n=1}^{m} \left[\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}}\right] = \left[\frac{2}{\sqrt{1}} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right] + \left[\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right] + \left[\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{4}}\right] + \cdots + \left[\frac{2}{\sqrt{m-1}} - \frac{2}{\sqrt{m}}\right] + \left[\frac{2}{\sqrt{m}} - \frac{2}{\sqrt{m+1}}\right] = 2 - \frac{2}{\sqrt{m+1}}$$

Então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}}\right] = \lim_{m\to\infty} \left[2 - \frac{2}{\sqrt{m+1}}\right] = 2$ segue que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < 2.$ $\square$

Problema 18 – IMC 2018. Sejam $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ duas sequências de números positivos.

Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) Existe uma sequência $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ de números positivos tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b_n}$ são ambas convergentes.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}$ converge.

Solução – SO: Note que uma série de termos positivos ou é limitada e portanto converge ou diverge a infinito.

Neste caso, dizer que a soma é menor do que infinito equivale a dizer que converge.

(1) $\Longrightarrow$ (2): Pela desigualdade das médias aritmética e geométrica temos que $\displaystyle\sqrt{\frac{a_n}{b_n}} = \sqrt{\frac{a_n}{c_n} \cdot \frac{c_n}{b_n}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a_n}{c_n} + \frac{c_n}{b_n}\right).$

Logo temos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{b_n}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{a_n}{c_n} + \frac{c_n}{b_n}\right)\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b_n} < \infty.$ Portanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}$ converge.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Seja $c_n = \sqrt{a_n b_n}$. Então $\displaystyle\frac{a_n}{c_n} = \frac{c_n}{b_n} = \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}.$

Por hipótese a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}$ converge e assim as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n}$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b_n}$ também convergem. $\square$

Problema 19 – IMC 2019. Calcule o produto $\displaystyle\prod_{n=3}^{\infty}\frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}$.

Solução: Seja $a_n=\dfrac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}$.

Observe que

$$a_n=\frac{(n^3+3n)^2}{(n^3-8)(n^3+8)}=\frac{n^2(n^2+3)^2}{(n-2)(n^2+2n+4)(n+2)(n^2-2n+4)}=\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n}{n+2}\cdot\frac{n^2+3}{(n-1)^2+3}\cdot\frac{n^2+3}{(n+1)^2+3}.$$

Logo, para $N\geqslant 3$, temos que

$$\prod_{n=3}^{\infty}\frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}=\left(\prod_{n=3}^{N}\frac{n}{n-2}\right)\left(\prod_{n=3}^{N}\frac{n}{n+2}\right)\left(\prod_{n=3}^{N}\frac{n^2+3}{(n-1)^2+3}\right)\left(\prod_{n=3}^{N}\frac{n^2+3}{(n+1)^2+3}\right).$$

Vamos calcular cada um desses quatro produtórios separadamente

$$\prod_{n=3}^{N}\frac{n}{n-2}=\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}\cdots\frac{N-2}{N-4}\cdot\frac{N-1}{N-3}\cdot\frac{N}{N-2}=\frac{N(N-1)}{1\cdot 2}$$

$$\prod_{n=3}^{N}\frac{n}{n+2}=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{8}\cdots\frac{N-2}{N}\cdot\frac{N-1}{N+1}\cdot\frac{N}{N+2}=\frac{3\cdot 4}{(N+1)(N+2)}$$

$$\prod_{n=3}^{N}\frac{n^2+3}{(n-1)^2+3}=\frac{3^2+3}{2^2+3}\cdot\frac{4^2+3}{3^2+3}\cdot\frac{5^2+3}{4^2+3}\cdot\frac{6^2+3}{5^2+3}\cdots\frac{(N-2)^2+3}{(N-3)^2+3}\cdot\frac{(N-1)^2+3}{(N-2)^2+3}\cdot\frac{N^2+3}{(N-1)^2+3}=\frac{N^2+3}{2^2+3}$$

$$\prod_{n=3}^{N}\frac{n^2+3}{(n+1)^2+3}=\frac{3^2+3}{4^2+3}\cdot\frac{4^2+3}{5^2+3}\cdot\frac{5^2+3}{6^2+3}\cdot\frac{6^2+3}{6^2+3}\cdots\frac{(N-2)^2+3}{(N-1)^2+3}\cdot\frac{(N-1)^2+3}{(N)^2+3}\cdot\frac{N^2+3}{(N+1)^2+3}=\frac{3^2+3}{(N+1)^2+3}$$

Logo temos que

$$\prod_{n=3}^{N}\frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}=\frac{N(N-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 4}{(N+1)(N+2)}\cdot\frac{N^2+3}{2^2+3}\cdot\frac{3^2+3}{(N+1)^2+3}=\frac{72}{7}\cdot\frac{N(N-1)(N^2+3)}{(N+1)(N+2)[(N+1)^2+3]}$$

Portanto

$$\prod_{n=3}^{\infty}\frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=3}^{N}\frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{72}{7}\cdot\frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1+\frac{3}{N^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{N}\right)\left(1+\frac{2}{N}\right)\left[\left(1+\frac{1}{N}\right)^2+\frac{3}{N^2}\right]}\right]=\frac{72}{7}.\ \square$$

Problema 20 – IMC 2019. Seja $C = \{4, 6, 8, 9, 10, \ldots\}$ o conjunto dos inteiros positivos compostos.

Para cada $n \in C$, seja a_n o menor inteiro positivo k tal que $k!$ é divisível por n.

Determine se a série abaixo converge:
$$\sum_{n \in C} \left(\frac{a_n}{n}\right)^n.$$

Solução: Observe que

$a_4 = 4, a_6 = 3, a_8 = 4, a_9 = 6, a_{10} = 5, a_{12} = 4, \ldots$ e $\frac{a_4}{4} = 1, \frac{a_6}{6} = \frac{1}{2}, \frac{a_8}{8} = \frac{1}{2}, \frac{a_9}{9} = \frac{2}{3}, \frac{a_{10}}{10} = \frac{1}{2}, \frac{a_{12}}{12} = \frac{1}{3}, \ldots$

Provaremos que $\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{2}{3}$, para $n > 4$ e assim

$$\sum_{n \in C} \left(\frac{a_n}{n}\right)^n = \left(\frac{a_4}{4}\right)^4 + \sum_{n \in C, n > 4} \left(\frac{a_n}{n}\right)^n \leqslant 1 + \sum_{n \in C, n > 4} \left(\frac{2}{3}\right)^n < 1 + \sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 + \frac{(2/3)^5}{1 - 2/3} = \frac{113}{81}.$$

Com isso teremos provado que a série converge.

Agora provaremos que $\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{2}{3}$, para $n > 4$ e assim

$\boxed{1^o \text{ caso}}$ n tem pelo menos dois divisores primos distintos.

Então n pode ser fatorado como $n = ab$ com $a, b \geqslant 2$ e a e b são relativamente primos.

Supõe, sem perda de generalidade, que $a > b$.

Como $a|a!$ e $b|b!|a!$, assim $n = ab|a!$, então $a_n \leqslant a$ e assim $\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{a}{n} = \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{2}$.

$\boxed{2^o \text{ caso}}$ n é o quadrado de um primo, $n = p^2$ para algum primo $p \geqslant 3$.

Como $p^2|(p \cdot 2p)|(2p)!$ segue que $a_n = 2p$ e assim $\frac{a_n}{n} = \frac{2p}{p^2} = \frac{2}{p} \leqslant \frac{2}{3}$.

$\boxed{3^o \text{ caso}}$ n é a potência de um primo, $n = p^k$ para algum primo p e $k \geqslant 3$.

Note que $p^k|(p \cdot p^2 \cdots p^{k-1})$ e assim $a_n \leqslant p^{k-1}$ e assim $\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{p^{k-1}}{p^k} = \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{2}$. $\square$

Problema 21 – IMC 2018. Seja $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ a sequência de números reais $a_0 = 0$ e $a_{n+1}^3 = a_n^2 - 8$ para $n \geqslant 0$.

Prove que a série abaixo é convergente:
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|.$$

Solução: Estimaremos o quociente entre $|a_{n+2} - a_{n+1}|$ e $|a_{n+1} - a_n|$.

Afirmamos que $-2 \leqslant a_n \leqslant -\sqrt[3]{4}$, para $n \geqslant 1$.

$\boxed{-2 \leqslant a_n}$ $a_n = \sqrt[3]{a_{n-1}^2 - 8} \geqslant \sqrt[3]{-8} = -2.$

$\boxed{a_n \leqslant -4}$ Provaremos por indução em n. Temos que $a_1 = -2 = \sqrt[3]{8} < -\sqrt[3]{4}$.

Agora supõe que $-2 \leqslant -\sqrt[3]{4} < 0$, então $a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n^2 - 8} \leqslant \sqrt[3]{2^2 - 8} = -\sqrt[3]{4}$.

Usando a identidade $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ e a definição de a_n temos que

$(a_{n+2}^2 + a_{n+2}a_{n+1} + a_{n+1}^2) \cdot |a_{n+2} - a_{n+1}| = |a_{n+2}^3 - a_{n+1}^3| = |(a_{n+1}^2 - 8) - (a_n^2 - 8)| = |a_{n+1} + a_n| \cdot |a_{n+1} - a_n|.$

Como $-2 \leqslant a_n \leqslant -\sqrt[3]{4}$ temos que $a_k^2 \geqslant 4^{2/3}, a_{k+1}a_k \geqslant 4^{2/3}$ e $|a_{k+1} + a_k| \leqslant 4$, para todo k.

Logo $a_{n+2}^2 + a_{n+2}a_{n+1} + a_{n+1}^2 \geqslant 3 \cdot 4^{2/3}$ e $|a_{n+1} + a_n| \leqslant 4$.

Então temos que $3 \cdot 4^{2/3} \cdot |a_{n+2} - a_{n+1}| \leqslant 4 \cdot |a_{n+1} - a_n|$.

Assim segue que $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqslant \dfrac{4}{3 \cdot 4^{2/3}} \cdot |a_{n+1} - a_n| = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}|a_{n+1} - a_n|$.

Por indução podemos verificar que $|a_{n+1} - a_n| \leqslant \left(\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)^{n-1} |a_2 - a_1|$.

Portanto $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \leqslant |a_1 - a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)^{n-1} |a_2 - a_1|$.

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)^{n-1} |a_2 - a_1|$ é uma série geométrica com razão $q = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{3} \in (-1, 1)$,ela converge e assim a série

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ também converge. $\square$

Referências

[1] Kaczor, W.J.; Nowak, M.T. **Problems in Mathematical Analysis – Real Numbers, Sequences and Series**. vol. 1.

[2] **https://www.imc-math.org.uk/**