OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática.
25^a **Semana Olímpica - Cabo de Santo Agostinho - PE.**
20 a 24 de julho de 2022.

Prof. Carlos Gomes - DMAT UFRN.
cgomesmat@gmail.com

Um passeio pela Álgebra Olímpica: Polinômios, Grupos e Matrizes - Nível Universitário.

---

1 Introdução

Polinômios, Grupos e Matrizes são tópicos bastante ricos; seja na teoria ou nas aplicações da Matemática em áreas afins. Nas competições Matemáticas o primeiro desses temas é bastante clássico, dada a sua riqueza e diversidade na sua Teoria e na enorme variedade de problemas. Os dois outros temas vem sendo cada vez mais explorados nas mais diversas competições Matemáticas pelo mundo afora. A seguir apresentamos uma coletânea de problemas extraídos quase que totalmente de provas, listas de preparação, simulados, livros e revistas relacionadas com as olimpíadas de Matemática. Convidamos você para fazer um vôo sobre os temas, que apesar rápido, acreditamos que pode revelar a bela paisagem que se esconde no interior desses temas. Vamos ao vôo!

2 Problemas resolvidos

Exemplo. 2.1 (STANFORD)**.** *Qual é o resto da divisão de*

$$P(x) = x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x \text{ por } x^3 - x?$$

Solução. Como o divisor é do terceiro grau, o resto é da forma $r(x) = ax^2 + bx + c$. Pelo algoritmo da divisão , temos:

$$\text{dividendo=divisor.quociente+resto}$$

$$p(x) = (x^3 - x)q(x) + ax^2 + bx + c \Rightarrow$$
$$x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x = (x^3 - x)q(x) + ax^2 + bx + c.$$

Substituindo $x = 0, 1$ e -1 sucessivamente, chegamos a um sistema linear com três incógnitas a, b e c. Resolvendo esse sistema, obtemos $a = 5, b = 0$ e $c = 0$. Logo o resto será $r(x) = 5x$. Observe que a substituição que fizemos foi conveniente porque usamos as raízes do divisor $x^3 - x$.

Segunda resolução (Mathematical Morsels - Ross Hosnberger). Temos que:

$$\frac{x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x}{x^3 - x} = \frac{x^{80} + x^{48} + x^{24} + x^8 + 1}{x^2 - 1}$$
$$= \frac{(x^{80} - 1) + (x^{48} - 1) + (x^{24} - 1) + (x^8 - 1) + 5}{x^2 - 1}.$$

Como $x^2 - 1$ é divisor de $x^{2n} - 1$, ou seja, divide as quatro primeiras parcelas do numerador, o resto é aparentemente 5. Como o x foi cancelado no numerador e no denominador, o resto é $5x$, já que $\frac{5}{x^2-1} = \frac{5x}{x^3-x}$. ■

Exemplo. 2.2. *Resolva, em* $\mathbb{C}$, *a equação*

$$(12x - 1)(6x - 1)(4x - 1)(3x - 1) = 5.$$

Solução. Fazendo $x = \frac{y}{12}$, obtemos:

$$(12.\frac{y}{12} - 1)(6.\frac{y}{12} - 1)(4.\frac{y}{12} - 1)(3.\frac{y}{12} - 1) = 5 \Rightarrow$$
$$(y - 1)(y - 2)(y - 3)(y - 4) = 2.3.4.5 \Rightarrow$$
$$(y - 1)(y - 2)(y - 3)(y - 4) = (-2).(-3).(-4).(-5)$$

Uma possibilidade para que essas igualdades ocorram é que $y - 4 = 2 \Rightarrow y = 6$ ou $y - 4 = -5 \Rightarrow y = -1$. Sendo r_1 e r_2 as outras duas raízes da equação em y, segue que:

$$(-1).6.r_1.r_2 = -120 + (-1).(-2).(-3).(-4) \Rightarrow r_1.r_2 = 16.$$
$$-1 + 6 + r_1 + r_2 = -(-1 - 2 - 3 - 4) \Rightarrow r_1 + r_2 = 5.$$

Portanto r_1 e r_2 são as raízes da equação quadrática $y^2 - 5y + 16 = 0$, que são os números comlexos

$$r_1 = \frac{5 - i\sqrt{39}}{2} \quad e \quad r_2 = \frac{5 + i\sqrt{39}}{2}.$$

Como $x = \frac{y}{12}$, segue que as raízes da equação original são os números
$$-\frac{1}{12}, \frac{1}{2}, \frac{5-i\sqrt{39}}{24} \quad e \quad \frac{5+i\sqrt{39}}{24}.$$
■

Exemplo. 2.3. *Se α é uma raiz positiva da equação*
$$x(x+1)(x+2)\cdots(x+2022) = 1,$$
mostre que $\alpha < \frac{1}{2022!}$.

Solução. Ora, sendo $\alpha > 0$ uma raiz da equação, segue que
$$\alpha(\alpha+1)(\alpha+2).\cdots.(\alpha+2022) = 1.$$
Como $\alpha > 0$, segue que
$$\begin{cases} \alpha+1 > 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha+1} < 1 \\ \alpha+2 > 2 \Rightarrow \frac{1}{\alpha+2} < \frac{1}{2} \\ \alpha+3 > 3 \Rightarrow \frac{1}{\alpha+3} < \frac{1}{3} \\ \vdots \\ \alpha+2022 > 2022 \Rightarrow \frac{1}{\alpha+2022} < \frac{1}{2022} \end{cases}$$
Como $\alpha(\alpha+1)(\alpha+2).\cdots.(\alpha+2022) = 1$, segue que
$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2).\cdots.(\alpha+2022)} \\ &= \frac{1}{(\alpha+1)} \cdot \frac{1}{(\alpha+2)}.\cdots.\frac{1}{(\alpha+2022)} \\ &< \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}.\cdots.\frac{1}{2022} \\ &= \frac{1}{1.2.3.\cdots.2022} \\ &= \frac{1}{2022!} \end{aligned}$$
Assim, $\alpha < \frac{1}{2022!}$, como queríamos demonstrar. ■

Exemplo. 2.4. *Sabendo-se que o polinômio*
$$p(x) = x^{100} - 600x^{99} + a_{98}x^{98} + a_{97}x^{97} + \cdots + a_1x + a_0$$
tem 100 *raízes reais e qua* $p(7) > 1$*, mostre que* p *possui pelo menos uma raiz maior que* 7.

Solução. Suponha, por absurdo que todas as raízes do polinômio p sejam $x_i < 7$ para $i = 1, 2, 3, \cdots, 100$. Assim,
$$p(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).\cdots.(x-x_{100}).$$
Portanto,
$$1 < p(7) = (7-x_1)(7-x_2)(7-x_3).\cdots.(7-x_{100}) \Rightarrow$$
$$\begin{aligned} 1 &= \sqrt[100]{1} < \sqrt[100]{(7-x_1)(7-x_2)(7-x_3).\cdots.(7-x_{100})} \\ &\leq \frac{(7-x_1)+(7-x_2)+(7-x_3)+\cdots+(7-x_{100})}{100} \\ &= \frac{700 - \sum_{i=1}^{100} x_i}{100} \\ &= 1 \end{aligned}$$
ou seja, $1 < 1$, o que é um absurdo! Portanto não é possível que todas as raízes do polinômio p sejam todas menores que 7, o que nos permite concluir que pelo menos uma das raízes é maior que 7. ■

Exemplo. 2.5. *Seja* $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ *um polinômio com coeficientes inteiros. Suponha que a equação* $p(x) = 0$ *tem três raízes distintas. Mostre que a equação* $p(x) - 1 = 0$ *não admite nenhuma raiz inteira.*

Solução. Sejam x_1, x_2 e x_3 as três raízes inteiras distintas de $p(x) = 0$. Pelo teorema da decomposição, podemos escrever $p(x)$ assim:
$$p(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$
Se admitirmos que a equação $p(x) - 1 = 0$ tem uma raiz inteira x_0 , segue-se que:
$$p(x+0) - 1 = 0 \Leftrightarrow p(x_0) = 1 \Leftrightarrow (x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3) = 1.$$
Para que o produto de três números inteiros seja igual a 1, há duas possibilidades:

- Os três números são iguais a 1, ou seja, $x_0 - x_1 = 1, x_0 - x_2 = 1$ e $x_0 - x_3 = 1$.

  Neste caso, teríamos as três raízes de $p(x)$ iguais a $x_0 - 1$, contradizendo a hipótese de que as três raízes de $p(x)$ são distintas.

- Dois desses números são iguais a -1 e o terceiro igual a 1, ou seja, $x_0 - x_1 = -1, x_0 - x_2 = -1$ e $x_0 - x_3 = 1$.

  Neste caso, teríamos duas raízes de $p(x)$ iguais a $x_0 + 1$, contradizendo mais uma vez a hipótese de que as três raízes de $p(x)$ são distintas.

Concluímos assim que a equação $p(x) - 1 = 0$ não pode ter raízes inteiras. ■

Exemplo. 2.6 (IME)**.** *Mostre que*
$$p(x) = x^{999}+x^{888}+x^{777}+x^{666}+x^{555}+x^{444}+x^{333}+x^{222}+x^{111}+1$$
é divisível por $d(x) = x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1.$

Solução. Devemos mostrar que todas as raízes de $d(x) = x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ são também raízes
$$p(x) = x^{999}+x^{888}+x^{777}+x^{666}+x^{555}+x^{444}+x^{333}+x^{222}+x^{111}+1.$$
Ora, se $d(x) = \frac{x^{10}-1}{x-1}$ e α é raiz de d, então $\alpha^{10} = 1$ e $\alpha \neq 1$. Mostremos que α é raiz de $p(x)$. Como
$$p(x) = \frac{(x^{111})^{10}-1}{x^{111}-1} = \frac{(x^{10})^{111}-1}{x^{111}-1},$$
vem que
$$p(\alpha) = \frac{(\alpha^{111})^{10}-1}{\alpha^{111}-1} = \frac{(\alpha^{10})^{111}-1}{\alpha^{111}-1} = \frac{(1)^{111}-1}{\alpha^{111}-1} = \frac{1-1}{\alpha^{111}-1} = 0.$$
Concluímos que $p(x)$ é divisível por $d(x)$. ■

Exemplo. 2.7 (USA). *Determine as raízes reais ou complexas, do sistema de equações simultâneas:*

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$$

Solução. Seja x, y e z raízes da equação

$$t^3-at^2+bt-c=0.$$

Por Girard,

$$a=x+y+z=3.$$

Por outro lado,

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz) \Rightarrow 3^2=3+2b \Rightarrow b=3.$$

Substituindo as raízes x, y e z na equação $t^3-at^2+bt-c=0$, segue que

$$\begin{cases} x^3-ax^2+cx-c=0 \\ y^3-ay^2+by-c=0 \\ z^3-az^2+bz-c=0 \end{cases}$$

Adicionando membro a membro esses três igualdades, segue que

$$x^3+y^2+z^3-a(x^2+y^2+z^2)+b(x+y+z)-3c=0.$$

Assim,

$$3-a.3+b.3-3c=0 \Rightarrow 3c=3 \Rightarrow c=1.$$

Portanto a equação $t^3-at^2+bt-c=0$ assume a forma

$$t^3-3t^2+3t-1=0 \Rightarrow (t-1)^3=0 \Rightarrow t=1$$

■

Exemplo. 2.8. *Prove que se $abc=1$ e $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$, então pelo menos um dos a, b e c é igual a 1.*

Solução. Sejam a, b e c raízes da equação $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0$. Lembrando que $abc=1$, e por desenvolvimento de $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$, chega-se a $ab+ac+bc=a+b+c$, o que faz com que a soma dos coeficientes da equação seja zero. Assim, o número 1 é uma das raízes da equação. Portanto $a=1$ ou $b=1$ ou $c=1$. ■ Uma resolução alternativa para a questão acima é:

Como

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c,$$

segue que

$$\frac{ab+ac+bc}{abc}=a+b+c$$

isto é, $ab+ac+bc=a+b+c$, já que $abc=1$. Assim,

$$\begin{aligned}(a-1)(b-1)(c-1) =& abc+ab+ac+bc-(a+b+c)-1 \\ =& abc-1+ab+ac+bc-(a+b+c) \\ =& 0\end{aligned}$$

De $(a-1)(b-1)(c-1)=0$, vem que $a=1$ ou $b=1$ ou $c=1$.

Exemplo. 2.9 (OLIMPÍADA PESSOENSE). *Determine todos os polinômios que satisfazem as seguintes condições:*

(*a*) $p(0)=0$.

(*b*) $p(x^{2011}+1)=[p(x)]^{2011}+1$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Solução. Seja p o polinômio procurado. De acordo com o enunciado p deve cumprir as seguintes condições:

(*a*) $p(0)=0$.

(*b*) $p(x^{2011}+1)=[p(x)]^{2011}+1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Fazendo $x=0$ em $p(x^{2011}+1)=[p(x)]^{2011}+1$, segue que

$$p(0^{2011}+1)=[p(0)]^{2011}+1 \Rightarrow p(1)=0^{2011}+1 \Rightarrow p(1)=1.$$

Fazendo $x=1$, segue que

$$p(1^{2011}+1)=[p(1)]^{2011}+1 \Rightarrow p(2)=1^{2011}+1 \Rightarrow p(2)=2.$$

Fazendo $x=2$, segue que

$$p(2^{2011}+1)=[p(2)]^{2011}+1 \Rightarrow p(2^{2001}+1)=2^{2011}+1.$$

Fazendo $x=2^{2011}+1$, segue que

$$p((2^{2011}+1)^{2011}+1)=[p(2^{2011}+1)^{2011}]^{2011}+1 \Rightarrow$$

$$p((2^{2011}+1)^{2011}+1)=(2^{2011}+1)^{2011}+1.$$

Prosseguindo dessa mesma forma iremos obter uma lista infinita de números reais a tais que $p(a)=a$. Definindo o polinômio f por $f(x)=p(x)-x$, segue que todos os números a da lista infinita que citamos acima são zeros do polinômio f. Assim o polinômio f, de coeficientes reais, possui infinitos zeros reais, mas isso só é possível se o polinômio f for identicamente nulo (um polinômio com ceoficientes reais que não é identicamente nulo só possui uma quantidade finita de raízes!). Assim,

$$f(x) \equiv 0 \Leftrightarrow p(x)-x \equiv 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Diante do exposto,concluímos que o único polinômio p que cumpre as condições impostas pelo enunciado é o polinômio $p(x)=x$. ■

Exemplo. 2.10. *O polinômio $p(x)=x^5+x+1$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$?*

Solução. Não pois,

$$\begin{aligned} x^5+x+1 =& \ x^5-x^2+x^2+x+1 \\ =& \ x^2(x^3-1)+(x^2+x+1) \\ =& \ x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1) \\ =& \ (x^2+x+1)(x^3+x+1) \end{aligned}$$

■

Exemplo. 2.11. *Seja $a \in M(n, \mathbb{C})$ tal que $A^3-2A^2+A=0$. Mostre que $tr(A) \in \mathbb{Z}$.*

Solução. Seja $p(x) = x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1) = x(x-1)^2 \in \mathbb{C}[x]$. Ora, como $p(A) = 0$, seque que o polinômio minimal de A divide $p(x)$, o que revela que o conjunto das raízes do polinômio minimal de A está contido no conjunto das raízes do polinômio $p(x)$, que é o conjunto $\{0,1\}$. Por fim, as raízes do polinômio minimal de A são seus autovalores. Ora, como os autovalores de A pertencem ao conjunto $\{0,1\}$ segue que $tr(A) \in \mathbb{Z}$, visto que $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ são os autovalores de A. ∎

Exemplo. 2.12. *Se $A, B \in M(n,\mathbb{C})$ são tais que $A^2 = B^2 = (AB)^2 = I_n$, onde I_n representa a matriz identidade, mostre que A e B comutam, isto é, $AB = BA$.*

Solução. De fato, como $(AB)^2 = I_n$, segue que:

$$(AB)^2 = I_n \Rightarrow ABAB = I_n \Rightarrow$$
$$AABABB = AB \Rightarrow A^2BAB^2 = AB \Rightarrow$$
$$I_nBAI_n = AB \Rightarrow BA = AB.$$

∎

Exemplo. 2.13. *Se no grupo G tem-se que $a^5 = e, aba^{-1} = b^2$ para certos $a, b \in G$ (e sendo o elemento neutro de G), mostre que se $b \neq e$, então a ordem de b é igual a 31.*

Solução. Ora, como $a^5 = e$, segue que a ordem de a, $\mathcal{O}(a) = 1$ ou 5. Se $\mathcal{O}(a) = 1$, segue que $a = e$. Nesse caso,

$$aba^{-1} = b^2 \Rightarrow ebe^{-1} = b^2 = b^2 \Rightarrow b = e,$$

o que não pode ocorrer, pois, por hipótese, $b \neq e$.
Por outro lado, se $\mathcal{O}(a) = 5$, segue que:

$$b^4 = (b^2)^2 = b^2b^2 = (aba^{-1})(aba^{-1}) = ab^2a^{-1}.$$

Assim,

$$b^4 = ab^2a^{-1} = a(aba^{-1})a^{-1} = a^2ba^{-2}.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros,

$$b^4 = a^2ba^{-2} \Rightarrow b^8 = (a^2b^2a^{-2})^2 = a^2b^2a^{-2}a^2b^2a^{-2} = a^2b^2a^{-2}$$

Ora, como $aba^{-1} = b^2$, segue que:

$$b^8 = a^2(aba^{-1})a^{-2} = a^3ba^{-3}.$$

Elevando novamente ao quadrado, segue que:

$$b^8 = (a^3b^2a^{-3})^2 \Rightarrow b^{16} = (a^3b^2a^{-3})(a^3b^2a^{-3}) = a^3b^2a^{-3}$$

usando a igualdade $b^2 = aba^{-1}$, segue que:

$$b^{16} = a^3b^2a^{-3} = a^3aba^{-1}a^{-3} = a^4ba^{-4}.$$

Elevando mais uma vez ambos os membros ao quadrado

$$b^{16} = a^4ba^{-4} \Rightarrow b^{32} = (a^4ba^{-4})^2 = (a^4ba^{-4})(a^4ba^{-4}) = a^4b^2a^{-4},$$

o que nos permite concluir que

$$b^{32} = a^4b^2a^{-4} \Rightarrow b^{32} = (a^4aba^{-1}a^{-4})^2 = a^5ba^{-5} = ebe^{-1} = b.$$

Portanto, $b^{32} = b \Rightarrow b^{31} = e \Rightarrow \mathcal{O}(b) = 31$. ∎

3 Problemas propostos

1. Seja $M(n,\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes de ordem n e coeficientes reais. Se $I_n \in M(n,\mathbb{R})$ é a matriz identidade, exiba uma matriz $B \neq \lambda I_n$, com $\lambda \in \mathbb{R}$ e $B \neq A$ tal que $AB = BA$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \ldots & 2n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ n^2-n & n^2-n+1 & n^2-n+2 & \ldots & n^2 \end{pmatrix}$$

2. Se $A \in M(n,\mathbb{R})$ é tal que suas entradas são -1 ou 1, mostre que $\det(A)$ é divisível por 2^{n-1}.

3. Mostre que não existem matrizes $A \in M(2021,\mathbb{R})$ tais que $A^2 + I = 0$, onde $I \in M(2021,\mathbb{R})$ é a matriz identidade.

4. Se $A, B \in M(n,\mathbb{C})$ são matrizes tais que A, B e $A - B$ são invertíveis, mostre que:

$$(A-B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}(B^{-1} - A^{-1})^{-1}A^{-1}.$$

Em particular, mostre que:

$$(I+A)^{-1} = I - (A^{-1} + I)^{-1}.$$

e que

$$tr(I+A)^{-1} + tr(A^{-1}+I)^{-1} = n.$$

5. Seja $A \in M(n,\mathbb{C})$. Mostre que existe $B \in M(n,\mathbb{C})$ tal que $AB = 0$, se e somente se $\det(A) = 0$.

6. Sejam A e B matrizes reais de tamanhos 5×7 e 7×5, respectivamente. Mostre que pelo menos uma entre as matrizes AB e BA não é invertível.

7. Seja $A \in M(n,\mathbb{R})$. Mostre que se o sistema de equações lineares $AX = 0$ possui uma solução complexa não trivial, então esse sistema também possui uma solução real não trivial.

8. Sejam $A, B \in M(n,\mathbb{C})$ e $p_B(\lambda) = \det(\lambda I - B)$ o polinômio característico de B. Mostre que a matriz $p_B(A)$ é invertível se, e somente se A e B não tem autovalores em comum.

9. Mostre que se todos os autovalores de $A \in M(n,\mathbb{C})$ são reais e se

$$tr(A^2) = tr(A^3) = tr(a^4) = c$$

para alguma constante c, então para todo inteiro positivo k, então $trA^k = c$ e c é um inteiro positivo.

10. Seja $A \in M(n,\mathbb{C})$. Se $tr(A^k) = 0$, para $k = 1, 2, \ldots, n$, mostre que $A^n = 0$.

11. Sejam $A, B \in M(n, \mathbb{C})$. Se $AB = 0$, mostre que:

$$tr(A+B)^k = tr(A^k) + tr(B^k).$$

12. Seja $A \in M(n, \mathbb{C})$. Mostre que se $A^3 = A$, então $posto(A) = tr(A^2)$.

13. Sejam A e B matrizes reais de ordens 3×2 e 2×3, respectivamente tais que

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Mostre que:

$$BA = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

14. Seja $A \in M(n, \mathbb{Q})$. Mostre que existe um polinômio $p \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $p(A) = 0$.

15. Seja $A \in M(3, \mathbb{C})$ uma matriz Hermitiana cujos autovalores são

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3.$$

Mostre que se a e b são autovalores da sua submatriz principal 2×2 de A e $a \leq b$, mostre que

$$\lambda_1 \leq a \leq \lambda_2 \leq b \leq \lambda_3.$$

16. Seja $A \in M(n, \mathbb{C})$ cujos autovalores são $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Mostre que:

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2.$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se, A é unitáriamente diagonalizável.

17. (a) Seja G um grupo multiplicativo com elemento neutro e tal que $x^2 = e$ para todo valor $x \in G$. Mostre que G é abeliano.

    (b) Mostre que o conjunto

    $$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}; \det(A) \neq 0\}$$

    é um grupo multiplicativo.

    (c) Se I_n representa a matriz identidade do grupo $GL_n(\mathbb{R})$. Determine a maior ordem possível de um subgrupo $H \subset GL_n(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = I_n$ para todo $A \in G$.

    (d) Supondo que $m, n \in \mathbb{Z}$ são tais que $m \neq n$, mostre que os grupos $GL_n(\mathbb{R})$ e$GL_m(\mathbb{R})$ não são isomorfos.

    (e) Mostre que os grupos $GL_n(\mathbb{Q}), GL_n(\mathbb{R})$ e $GL_n(\mathbb{C})$ são dois a dois isomorfos.

18. Seja $A \in M(n, \mathbb{R})$, com $n \geq 2$. Mostre que existem matrizes $U, V \in GL_n(\mathbb{R})$ tais que $A = U + V$.

19. Determine $a, b \in \mathbb{R}$ tal que o valor da integral

$$\int_0^1 |x^2 - ax - b| dx$$

seja o menor possível.

20. Quantas raízes negativas possui a equação $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$?

21. Entre os números abaixo

$$5 + 2\sqrt{6}, \quad 7 + 4\sqrt{3}, \quad 11 - 2\sqrt{30}, \quad 9 - 4\sqrt{5} \quad e \quad 17 - 12\sqrt{2}$$

apenas um deles é raiz do polinômio $p(x) = x^4 - 40x^3 + 206x^2 - 40x + 1$. Qual é?

22. Mostre que o polinômio abaixo não possui raízes múltiplas.

$$p(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2007}}{2007!}$$

23. (C.Gomes) Quais são as raízes do polinômio abaixo:

$$P(x) = x^3 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}\right) x^2 + \\ + \left(\sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15}\right) x - \sqrt{30}?$$

24. (a) Mostre que todas as raízes do polinômio $p(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots + nz^{n-1}$ estão no interior do disco unitário centrado na origem.

    (b) Mostre que a mesma conclusão continua sendo verdadeira para qualquer polinômio $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n \in \mathbb{R}[x]$ e $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n$.

25. Mostre que existe um polinômio p com coeficientes inteiros tal que $\cos(n\theta) = p(\cos\theta)$, para todo inteiro positivo n e todo θ fixados (Esse polinômio é chamado de **Polinônio de Tchebyshev do primeiro tipo**).

26. (OMRN - Lista de preparação) Calcule o valor do produto

$$P = \cos\left(\frac{\pi}{2020}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2020}\right) \cdots \cos\left(\frac{2019\pi}{2020}\right).$$

27. (JEE - Índia) Mostre que:

$$\begin{aligned} S &= \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) \\ &+ \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) \\ &+ \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) \\ &+ \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) \\ &+ \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) \\ &= \frac{5}{16} \end{aligned}$$

28. (JEE - Índia) Mostre que:

    (a) $\cos\left(\frac{\pi}{22}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{22}\right) \cdots \cos\left(\frac{9\pi}{22}\right) = \frac{\sqrt{11}}{32}$.

    (b) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{11}\right) \text{sen}\left(\frac{2\pi}{11}\right) \cdots \text{sen}\left(\frac{5\pi}{11}\right) = \frac{\sqrt{11}}{32}$.

29. (JEE - Índia) Mostre que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)\ldots\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) = \frac{1}{32}.$$

30. (MIT-2003)Sejam a, b e c as raízes do polinômio $p(x) = x^3 + x^2 - 333x - 1001$. Determine $a^3 + b^3 + c^3$.

31. (MIT-2003) Suponha que $p(x)$ é um polinômio tal que $p(1) = 1$ e

$$\frac{p(2x)}{p(x+1)} = 8 - \frac{56}{x+7}$$

para todos os números reais x para os quais ambos os membros da igualdade acima estejam bem definidos. Determine $p(-1)$.

32. Seja $z \in \mathbb{C}$ uma raiz do polinômio $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, onde $a_i \in [0, 1]$. Mostre que $Re(z) < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

33. (FGV-2001)Considere a equação polinomial $x^3 + x - 5 = 0$. Prove que ela tem uma raiz irracional entre 1 e 2.

34. Mostre que o polinômio $p(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 1$ tem quatro zeros de módulo igual a 1.

35. Mostre que uma das raízes do polinômio

$$p(x) = x^5 + 15x + 12$$

é o número real

$$\alpha = \sqrt[5]{\frac{-75 + 21\sqrt{10}}{125}} + \sqrt[5]{\frac{-75 - 21\sqrt{10}}{125}} + \sqrt[5]{\frac{225 + 72\sqrt{10}}{125}} + \sqrt[5]{\frac{225 - 72\sqrt{10}}{125}}$$

36. Se um polinômio p, com coeficientes reais, é tal que $p(senx) = p(cosx)$ para todo x real, mostre que existe um polinômio q tal que $p(x) = q(x^4 - x^2)$, para todo x real.

37. (RPM)Mostre que o polinômio $p(x) = x^7 + 2x^6 + 3x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ não pode possuir todas as suas raízes como sendo números reais, independente dos valores que $a, b, c, d,$ e e possam assuimir dentro do conjunto dos números complexos.

38. Um número real é dito algébrico quando é raiz de um polinômio não nulo com coeficientes inteiros. Mostre que $sen1$ř é um número algébrico.

39. (França)Seja n um inteiro positivo. Determine os coeficientes do único polinômio $P_n(x)$ tal que

$$cos^{2n}\theta + sen^{2n}\theta = P_n(sen^2(2\theta))$$

para todo θ real.

40. (Turquia)Determine todos os inteiros positivos n para que todos os coeficientes do polinômio

$$\begin{aligned} P_n(x) = &(x^2 + x + 1)^n - (x^2 + x)^n \\ &- (x^2 + 1)^n - (x + 1)^n + x^{2n} + x^n + 1 \end{aligned}$$

são divisíveis por 7.

41. (Romenia)Sejam a, b e c números reais positivos tais que

$$a^6 + b^6 + c^6 \le \frac{32}{33}(a^3 + b^3 + c^3)^2$$

Mostre que pelo menos uma das equações quadráticas

$$ax^2 + bx + c = 0, bx^2 + cx + a = 0 \ ou \ cx^2 + ax + b = 0$$

não possui raízes reais.

42. (MIT-2004) Determine todas as soluções reais da equação $x^4 + (2 - x)^2 = 34$.

43. (MIT-2004)Seja x um número real tal que $x^3 + 4x = 8$. Determine o valor de $x^7 + 64x^2$.

44. (MIT-2004) Existe um polinômio p de grau 5 com a seguinte propriedade: Se z é um número complexo tal que $z^5 + 2004z = 1$, então $p(z^2) = 0$. Calcule o quociente $\frac{p(1)}{p(-1)}$.

45. (MIT-2005)Determine a soma dos valores absolutas das raízes da equação $x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x - 8 = 0$.

46. (MIT-2006)Sejam a, b e c as raízes da equação $x^3 - 9x^2 + 11x - 1 = 0$, e $s = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$. Determine o valor de $s^4 - 18s^2 - 8s$.

47. (MIT-2006) Seja $f(x) = x^4 - 6x^3 + 26x^2 - 46x + 65$. Se as raízes de $f(x)$ são $a_k + ib_k$ com $k = 1, 2, 3, 4$. Dado que todos os valores de a_k, b_k são inteiros, determine o valor de $|b_1| + |b_2| + |b_3| + |b_4|$.

48. (MIT-2006) Determine todos os números complexos z tais que $z^4 + 4z^2 + 6 = z$.

49. (MIT-2007)Considere o polinômio $p(x) = x^3 + x^2 - x + 2$. Determine todos os números rais r para os quais existe um número complexo z tal que $p(z) = r$.

50. (MIT-2007)Os números complexos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e α_4 são as quatro raízes distintas da equação $x^4 + 2x^3 + 2 = 0$. Determine o conjunto (não ordenado)

$$\{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4, \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4, \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\}.$$

51. (MIT-2007)O polinômio $f(x) = x^{2007} + 17x^{2006} + 1$ tem zeros distintos $r_1, r_2, \ldots, r_{2007}$. Um polinômio $p(x)$ é tal que $p\left(r_j + \frac{1}{r_j}\right) = 0$ para todo $j = 1, 2, \ldots, 2007$. Determine o valor de $\frac{p(1)}{p(-1)}$.

52. Sejam

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_{10}x^{10} + a_{11}x^{11} + a_{12}x^{12} + a_{13}x^{13}$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_{11}x^{11} + b_12x^{12} + b_{13}x^{13},$$

polinômios de coeficientes reais onde $a_{13} \neq 0, b_3 \neq 0$. Mostre que o grau do máximo divisor comum do polinômo $f(x) = mdc(f(x), g(x))$ é no máximo 6.

53. Sejam a e b dois elementos de um grupo tais que $aba = ba^2b$, $a^3 = e$ e $b^{2n-1} = e$ para algum inteiro positivo n. Mostre que $b = e$.

54. Se G é um grupo finito e m é um inteiro positivo relativamente primo com a ordem de G, mostre que para cada $a \in G$ existe um único $b \in G$ tal que $b^m = a$.

55. Sejam x e y elementos de um anel com unidade. Se $1 - xy$ é invertível, mostre que $1 - yx$ também é invertível.

56. Mostre que se num anel R tem-se que $x^3 = x$ para todo $x \in R$, então R é comutativo.

57. Seja $\mathbb{F}_5$ um corpo finito com 5 elementos. Se V é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial de dimensão 3, quantos subespaços vetoriais $S \subset V$ tais que $dimS = 2$ existem?

58. Prove que o grupo $GL_4(\mathbb{Q})$ das matrizes invertíveis de ordem 4 com entradas racionais não possi elementos de ordem 7.

59. Seja Γ um grupo (finito) multiplicativo das matrizes invertíveis de entradas complexas. Seja M a soma dos elementos de Γ. Mostre que $\det(M)$ e $tr(M)$ são inteiros.

60. Para uma matriz $n \times n$ com entradas complexas, definimos a **norma** de A por:

$$||A|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||Ax||,$$

onde $||x||$ denota a norma usual do $\mathbb{C}^n$. Sejam $a < 2$ e G o grupo multiplicativo das matrizes de ordem n tais que $||A - I_n|| \leq a, \forall A \in G$. Mostre que G é finito.

Referências

[1] Gelca, Razvan; Andreescu, Titu. Putnam and beyond. New York: Springer, 2007.

[2] Andreescu, Titu. Essential linear algebra with applications. Birkhauser, 2016.

[3] Honsberger, Ross. "Mathematical Morsels."Mathematical Association of (1979).

[4] Souza, Paulo Ney. Silva, Jorge Nuno. Berkley Problens in Mathematics, Springer Verlag, 1998.

[5] Feuillet, Christine; Selom, Isabelle. Algèbre-Geometrie 2° année - MP-MP*, Hachette Supérieur, 2004.

[6] www.obm.org.br

[7] www.imc-math.org.uk

[8] www.ematematicaoxente.com.br