PROBLEMAS OLÍMPICOS DE CÁLCULO

RICARDO BORTOLOTTI - SEMANA OLÍMPICA 2022

1. Sequências e Séries

Problema 1 (OBMU 2016). *Seja $\{a_n\}$ uma sequência de número reais tal que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n}$ converge. Prove que*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k = 0.$$

Idéia: Um truque interessante para esse problema é utilizar a fórmula de soma por partes:

$$\sum_{k=m}^{n}a_k(b_{k+1}-b_k) = [a_nb_n - a_mb_m] - \sum_{k=m}^{n}(a_{k+1}-a_k)b_{k+1}.$$

Inspirados na analogia da fórmula acima com a integração por partes, formulamos um enunciado análogo para funções:

Problema Relacionado. *Seja $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que a integral imprópria $\int_1^\infty \frac{f(x)}{x}dx$ é convergente. Prove que*

$$\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y}\int_1^y f(x)dx = 0.$$

1.1. Convergência de séries.

Problema 2 (OBMU 2002). *Dados $x\in\mathbb{R}$, definimos $\ln_0(x) = x$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, se $\ln_k(x) > 0$, definimos $\ln_{k+1}(x) = \ln(\ln_k(x))$, onde $\ln$ é o logaritmo natural. Dado n inteiro positivo, definimos $k(n)$ como o maior k tal que $\ln_k(n)\geq 1$, e $a_n = \prod_{j=0}^{k(n)}\ln_j(x) = n\ln n(\ln\ln n)\cdots\ln_{k(n)}(n)$.*

Diga se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ converge ou diverge.

Idéia: Nos cursos de Cálculo, é explicado como usar o teste da integral para verificar que as séries $\displaystyle\sum\frac{1}{n\ln n}, \sum\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}, \sum\frac{1}{n\ln n\ln\ln n\ln\ln\ln n}, \cdots$ são divergentes. Adapte essa idéia.

Este mesmo problema veio a aparecer na Putnam de 2008.

Problema Relacionado (Putnam 2008). *Defina $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por $f(x) = x$ se $x\leq e$ e $f(x) = xf(\ln x)$ se $x > e$. Determine se a série $\sum\frac{1}{f(n)}$ é convergente ou divergente.*

Para os próximos 2 problemas, a solução passa por comparar as séries com outra do tipo $\sum\frac{1}{n^p}$.

Problema 3 (OBMU 2012). *Considere a parábola formada pelos pontos (x, x^2), $x \in \mathbb{R}$, e a sequência $x_n = n^\alpha$, onde $\alpha > 0$ é uma constante real. Considere a região formada pelos pontos (x, y) com $x > 0$ e que se situam abaixo da parábola e acima das retas tangentes à parábola nos pontos (x_n, x_n^2), $n \geq 0$. Para que valores de α essa região tem área infinita?*

Idéia: A área descrita corresponde a uma série infinita. A idéia é comparar a série com outra do tipo $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

Problema 4 (OBMU 2005). *Considere a sequência (a_n) dada por $a_1 = 1$ e*

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^{2005}}$$

para todo $n \geq 1$. Prove que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na_n}$ converge.

Idéia: Tome $k \in \mathbb{Z}$ para o qual é possível comparar $a_{n+1}^k = (a_n + \frac{1}{a_n^{2005}})^k$ com n.

Outro interessante problema da OBM-U sobre convergência de séries.

Problema 5 (OBMU 2006). *Seja $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ uma função crescente e bijetora. Prove que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ converge se, e somente se, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ converge, sendo f^{-1} a função inversa de f.*

1.2. **Sequências recorrentes.** Uma recorrência interessante é dada pela relação $a_{n+1} = a_n^2 - 2$. Nesse caso, o termo geral é da forma $a_n = \alpha^{2^n} + \alpha^{-2^n}$ para algum $\alpha \in \mathbb{C}$ encontrado através do a_1.

Problema 6 (OBMU 2003). *Defina $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = a_n^2 - 2$. Prove que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \ln a_n}{n} = \ln 2$ e calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\ln \ln a_n - n \ln 2)$.*

Essa recorrência já esteve presente em um problema da Putnam e em outro da IMC.

Problema Relacionado (Putnam 2014). *Sejam $a_0 = \frac{5}{2}$ e $a_{k+1} = a_k^2 - 2$ para todo $k \geq 1$. Calcule*

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{a_k}\right).$$

Problema Relacionado (IMC-2010). *Defina a sequência $x_1, x_2, \cdots$ por $x_1 = \sqrt{5}$ e $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ para cada $n \geq 1$. Calcule*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}}.$$

1.3. **Séries de Potências.** Uma maneira de se calcular o valor explicito de uma série é através de série de potências quando sabemos qual função a série representa.

Problema 7 (OBMU 2004). *Calcule*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)}.$$

Idéia: Considere $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+3}}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)}$ *e derive três vezes.*

Problema Relacionado (IMC-2010). *Calcule*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)}.$$

Outro tipo de problema no qual é pedido o valor de uma série e as séries de potência vêm em nosso auxílio:

Problema 8 (OBMU 2009). *Considere a sequência* $a_0, a_1, \cdots$ *definida por* $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{\pi}{3}$ *e, para* $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{\pi(a_0a_n + a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + \cdots + a_na_0)}{3(n+1)}$$

Calcule

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{8} + \cdots.$$

Idéia: Considere $f(x) = \sum a_n x^n$ *e olhe para* $f(x)^2$.

Problema Relacionado (IMC-2003). *Considere a sequência* $\{a_n\}$ *definida por* $a_0 = 1$ *e*

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}.$$

Calcule

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}.$$

2. Derivadas

Problema 9 (OBMU 2006). *Dada* $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ *duas vezes diferenciável com* $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ *e* $1 + f(x) = \frac{1}{f''(x)}$ *para todo* $x \in [0, 1]$, *mostre que* $f(1) < \frac{3}{2}$.

Problema 10 (OBMU 2008). *Seja* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f_n(x) = \dfrac{x^{2008}}{2008} + x^2 - nx$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *e seja* m_n *o valor mínimo assumido por* f_n. *Determine* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que o limite* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{m_n}{n^\alpha}$ *existe e é não-nulo, e calcule esse limite (para esse valor de* α*).*

Problema 11 (OBMU 2012)**.** *Seja $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ uma função duas vezes derivável satisfazendo $f'(x) < 0$ para todo $x > 0$. Para cada $x > 0$ considere o triângulo cujos lados são a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$ e os dois eixos coordenados. Sabemos que a área deste triângulo é igual a C (constante e independente de x).*

Determine os possíveis valores de $f(1)$.

Problema 12 (OBMU 2016)**.** *Dados $C, D > 0$, dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é bonita se f é de classe C^2, $|x^3 f(x)| \leq C$ e $|xf''(x)| \leq D$ para todo x com $|x| \geq 1$.*

a) Prove que se f é uma função bonita então, dado $\epsilon > 0$, existe $x_0 > 0$ tal que, para $|x| \geq x_0$, $|x^2 f'(x)| < \sqrt{2CD} + \epsilon$.

b) Prove que, se $0 < E < \sqrt{2CD}$, então existe uma função bonita $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x_0 > 0$, existe $x > x_0$ com $|x^2 f'(x)| > E$.

2.1. **Teorema do Valor Médio e Teorema do Valor Intermediário.**

Problema 13 (OBMU 2009)**.** *Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ crescente, derivável e inversível.*

Se $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f^{-1}(x)dx$, prove que existem dois reais diferentes a e b, $0 \leq a < b \leq 1$, tais que $f'(a) = f'(b) = 1$.

Problema 14 (OBMU 2007)**.** *Considere a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $ac < 0$. Prove que, para todo inteiro positivo n, a equação $f(f(\cdots(f(x)))) = 0$ tem pelo menos uma solução real (aonde f é composta n vezes com ela mesma).*

3. Integrais

Problema 15 (OBMU 2010)**.** *Calcule:*

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x}{(\sin x + \cos x)\cos x} dx.$$

Problema 16 (OBMU 2001)**.** *Para todo $u \in \mathbb{R}$, seja*

$$I(u) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2u\cos x + u^2)dx.$$

a) Prove que $I(u) = I(-u) = \frac{1}{2}I(u^2)$.

b) Calcule $I(u)$ para todo $u \in \mathbb{R}$.

Problema 17 (OBMU 2005)**.** *Prove que:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \int_0^1 x^{-x} dx.$$

3.1. **Simetria.** Uma idéia particularmente interessante é fazer a mudança de variáveis $u = -x$, esta é especialmente útil quando não sabemos integral $f(x)$ mas sabemos integrar $f(x) + f(-x)$. Utilizando essa idéia, calcule as seguintes integrais.

Problema 18 (OBMU 2006). *Calcule a integral:* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x - x - 1}{(e^x - 1)x} dx.$

Problema 19 (OBMU 2005). *Calcule:* $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx.$

Problema 20 (OBMU 2002). *Calcule* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{x^2+1} + x - 1}{\sqrt{x^2+1} + x + 1} dx.$

Problema 21 (OBMU 2004). *Calcule* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^{2004}}{1 + e^x} dx.$

Problema Relacionado (Putnam 2005). *Calcule* $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\ln(x+1)}{x^2 + 1} dx.$

Problema Relacionado (IMC-1996). *Calcule a integral* $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{(1 + 2^x)\sin x} dx.$

4. Truque de Feynman

Problema 22. *Calcule* $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2 - 1}{\ln x} dx.$

Dica: Considere $I(t) = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^t - 1}{\ln x} dx$ *e calcule* $I'(t)$.

Problema 23. *Para* $a > b > 0$, *calcule* $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x(e^{ax} + 1)(e^{bx} + 1)} dx.$

5. Problemas com Teoria dos Números

Problema 24. *Se* $A = \{n \in \mathbb{N},\ n \text{ não tem o dígito } 7 \text{ em sua representação decimal}\}$, *prove que*

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n} < +\infty$$

Problema 25. *Prove que existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que os 2017 primeiros dígitos de* 2^n *são iguais a* 1.

Dica: Se α *é irracional, então a sequência* $\{n\alpha\}_{n \in \mathbb{N}}$ *é densa em* $[0, 1]$.

Problema 26. *a) Seja* $p(x)$ *um polinômio de grau* n *com coeficientes inteiros e seja* $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *tal que* $p(\alpha) = 0$. *Prove que existe* $c > 0$ *tal que*

$$|\alpha - p/q| > c/q^n$$

para quaisquer $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$.

b) Prove que $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ *é* ***transcedente****, isto é, não existe nenhum polinômio não nulo de coeficientes racionais com* $p(\alpha) = 0$*.*

Problema 27. *Prove que para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$*,*

$$\limsup_{n\to\infty} \cos^n(n\alpha) = 1.$$

6. Problemas Diversos

Problema 28 (OBMU 2016)**.** *Encontre todas as funções* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tais que*

$$f(x^2 + y^2 f(x)) = xf(y)^2 - f(x)^2$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$*.*

Problema 29 (OBMU 2016)**.** *Dados* $C, D > 0$*, dizemos que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é bonita se* f *é de classe* C^2*,* $|x^3 f(x)| \leq C$ *e* $|xf''(x)| \leq D$ *para todo* x *com* $|x| \geq 1$*.*

a) Prove que se f *é uma função bonita então, dado* $\epsilon > 0$*, existe* $x_0 > 0$ *tal que, para* $|x| \geq x_0$*,* $|x^2 f'(x)| < \sqrt{2CD} + \epsilon$*.*

b) Prove que, se $0 < E < \sqrt{2CD}$*, então existe uma função bonita* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que, para todo* $x_0 > 0$*, existe* $x > x_0$ *com* $|x^2 f'(x)| > E$*.*

Problema 30 (OBMU 2015)**.** *Encontre todas as funções* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tais que*

$$f(x + y^2) = f(x) + f(y)^2$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$*.*

Problema 31 (OBMU 2015)**.** *Dada uma reta* $r \subset \mathbb{R}^2$*, seja* ρ_r *a reflexão em relação a* r *(em particular,* $\rho_r(p) = p$ *se e somente se* $p \in r$*). Dizemos que* r *é eixo de simetria de um conjunto* $X \subset \mathbb{R}^2$ *se* $\rho_r(X) = X$*.*

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua cujo gráfico admite dois eixos de simetria distintos. Prove que o limite*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

existe e é finito.

Problema 32 (OBMU 2014)**.** *Sejam* $1 \leq x \leq y - 2 \leq 7$ *e sejam* C_1 *e* C_2 *os círculos de raio 1 centrados em* $(x, 0)$ *e* $(y, 0)$*, respectivamente.*

a) Qual é o comprimento do caminho mínimo de $(0, 0)$ *a* $(10, 0)$ *que não passa pelos interiores de* C_1 *e* C_2*?*

b) Quando x *e* y *variam, qual é a menor resposta possível para o item (a)?*

Problema 33 (OBMU 2013). *Seja $f_0 : [0,1] \to [0,1]$ definida por $f_0(x) = x$. Defina funções $f_n : [0,1] \to [0,1]$ para todo n natural por $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} f_n(4x)$ se $0 \le x \le 1/4$, $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}$ se $1/4 \le x \le 3/4$, $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(4x-3)$ se $3/4 \le x \le 1$.*

a) Prove que para quaisquer $x, y \in [0,1]$ e para qualquer n, vale

$$|f_n(x) - f_n(y)| \le f_n(|x-y|).$$

b) Encontre o maior número real α para o qual existe $C > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in [0,1]$ e para qualquer n , vale

$$|f_n(x) - f_n(y)| \le C \cdot |x-y|^\alpha.$$

Problema 34 (OBMU 2015). *Mostre que, para todo $b > 0$, temos*

$$I(b) = \int_1^\infty \frac{\sqrt{u+b}}{u^2+b} du > \frac{\pi}{2}.$$

Problema 35 (OBMU-2012). *Seja $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ uma função duas vezes derivável satisfazendo $f'(x) < 0$ para todo $x > 0$. Para cada $x > 0$ considere o triângulo cujos lados são a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$ e os dois eixos coordenados. Sabemos que a área deste triângulo é igual a C (constante e independente de x).*

Determine os possíveis valores de $f(1)$.

Problema 36 (OBMU 2008). *Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = \dfrac{x^{2008}}{2008} + x^2 - nx$, para cada $n \in \mathbb{N}$, e seja m_n o valor mínimo assumido por f_n. Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que o limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n^\alpha}$ existe e é não-nulo, e calcule esse limite (para esse valor de α).*

Problema 37 (OBMU 2008). *Prove que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{(\lambda+n^2)^2} < \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda+n^2},$$

para todo $\lambda \ge 0$.

Problema 38 (OBMU 2007). *Considere a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $ac < 0$. Prove que, para todo inteiro positivo n, a equação $f(f(\cdots(f(x)))) = 0$ tem pelo menos uma solução real (aonde f é composta n vezes com ela mesma).*

Problema 39 (OBMU 2007). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(f(x)) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que, para todo n inteiro positivo,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^n} = +\infty.$$