VII Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária

6 de novembro de 2004

Problema 1 (4 pontos)

Seja p um polinômio de grau menor ou igual a 4 com $p(1) = p(-1) = 0$, $p(0) = 1$ e tal que, para todo $x \in [-1, 1]$, $p(x) \leq 1$. Encontre o valor máximo de

$$\int_{-1}^{1} p(t)\, dt.$$

Problema 2 (5 pontos)

Considere a matriz real quadrada S de ordem n e entradas

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^{n} k^{i+j}.$$

Calcule $\det S$ (em função de n).

Problema 3 (5 pontos)

Sejam N_1, N_2, N_3 matrizes reais 2×2 tais que $N_1^2 = N_2^2 = N_3^2 = 0$. Prove que se existirem números reais x_1, x_2, x_3 não todos nulos com

$$x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3 = 0$$

então existem índices $i \neq j$ e um número real r com $N_i = r N_j$.

Problema 4 (6 pontos)

Dizemos que dois pontos de $\{0, 1\}^n$ são *vizinhos* se diferirem em uma única coordenada.

Os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ são disjuntos e sua união é $\{0, 1\}^n$. Sabemos que para quaisquer i, j existem $a_i \in A_i$ e $a_j \in A_j$ tais que a_i e a_j são vizinhos. Prove que

$$n \geq 2 \log_2 k - \log_2 \log_2 k - 1.$$

Problema 5 (7 pontos)
Seja $\mathcal{I}_k \subset \mathbb{C}$ o conjunto de todas as raízes de polinômios mônicos de grau k e coeficientes inteiros.

(a) (2 pontos) Mostre que $\mathcal{I}_2 \cap \mathbb{R}$ é denso em $\mathbb{R}$ mas $\mathcal{I}_2$ não é denso em $\mathbb{C}$.

(b) (5 pontos) Determine se $\mathcal{I}_3$ é denso em $\mathbb{C}$.

Obs: Um polinômio é mônico se o seu coeficiente de mais alto grau é igual a 1. Um conjunto X é denso em $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) se para todo $z \in \mathbb{R}$ (resp. $z \in \mathbb{C}$) e todo $\epsilon > 0$ existir $w \in X$ com $|z - w| < \epsilon$.

Problema 6 (7 pontos)
Para cada inteiro positivo n, seja

$$X_n = \{-2n+1, -2n+3, \ldots, -1, 1, \ldots, 2n-3, 2n-1\}$$

o conjunto dos inteiros ímpares de módulo menor do que $2n$. Seja $P_n \subset \mathbb{R}[x]$ o conjunto dos polinômios p de grau menor do que $2n$ tais que $|p(x)| \leq 1$ para todo $x \in X_n$. Seja $g(n) = \max_{p \in P_n} p(0)$ o maior valor possível de $p(0)$ para $p \in P_n$. Prove que o limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{\ln(n)}$$

existe e calcule-o.

Problema 7 (7 pontos)
Seja $\mathcal{S} = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ o conjunto de todas as seqüências com valores 1 ou -1. Para $p, q \in \mathcal{S}$, definimos

$$p \perp q \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \sum_{k < n} \frac{p(k)q(k)}{n} = 0.$$

Mostre que existe $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ tal que se $p \neq q$ então $f(p) \perp f(q)$.