VIII Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária
2005

Problema 1 (4 pontos)

Sejam $P(x, y) = (x^2y^3, x^3y^5)$, $P^1 = P$ e $P^{n+1} = P \circ P^n$. Seja $p_n(x)$ a primeira coordenada de $P^n(x, x)$ e seja $f(n)$ o grau de p_n. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} (f(n))^{1/n}.$$

Problema 2 (5 pontos)

Considere matrizes reais quadradas A, B, C de ordem n tais que $A^3 = -I$, $BA^2 + BA = C^6 + C + I$ e C é simétrica. É possível ter $n = 2005$?

Problema 3 (5 pontos)

Considere a seqüência definida recursivamente por $(x_1, y_1) = (0, 0)$,

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(\left(1 - \frac{2}{n}\right) x_n - \frac{1}{n} y_n + \frac{4}{n}, \left(1 - \frac{1}{n}\right) y_n - \frac{1}{n} x_n + \frac{3}{n}\right).$$

Calcule $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n)$.

Problema 4 (5 pontos)

Uma tangente variável t à circunferência $\mathcal{C}_1$, de raio r_1, corta a circunferência $\mathcal{C}_2$, de raio r_2, nos pontos A e B. As tangentes a $\mathcal{C}_2$ em A e B cortam-se no ponto P. Determine, em função de r_1 e r_2, a distância entre os centros de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ para a qual o lugar geométrico de P ao variar t está contido em uma hipérbole equilátera.

Obs: Uma hipérbole é equilátera se as suas assíntotas são perpendiculares.

Problema 5 (6 pontos)

Arnaldo e Bernaldo disputam um jogo em que cada um na sua vez diz um número natural e ganha aquele que disser 0. A cada jogada exceto a primeira, as jogadas válidas são determinadas a partir da jogada anterior n da seguinte forma: escreva

$$n = \sum_{m \in O_n} 2^m;$$

as jogadas válidas são os elementos m de O_n. Assim, por exemplo, depois de Arnaldo dizer $42 = 2^5 + 2^3 + 2^1$, Bernaldo deve responder com 5, 3 ou 1.

Definimos conjuntos $A, B \subset \mathbb{N}$ da seguinte forma. Temos $n \in A$ se e somente se Arnaldo, dizendo n na primeira jogada, tiver uma estratégia que garanta sua vitória; analogamente, temos $n \in B$ se e somente se Bernaldo tiver uma estratégia que garanta a sua vitória caso Arnaldo diga n na primeira jogada. Assim,

$$A = \{0, 2, 8, 10, \dots\}, \quad B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, \dots\}.$$

Defina $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = |A \cap \{0, 1, \dots, n-1\}|$. Assim, por exemplo, $f(8) = 2$ e $f(11) = 4$. Calcule

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)\ (\log(n))^{2005}}{n}.$$

Problema 6 (6 pontos)

Uma função suave $f : I \to \mathbb{R}$ é dita *totalmente convexa* se $(-1)^k f^{(k)}(t) > 0$ para todo $t \in I$ e para todo inteiro $k > 0$ (aqui I é um intervalo aberto).

Prove que toda função totalmente convexa $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é real analítica.

Obs: Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é suave se para todo inteiro positivo k a derivada de k-ésima ordem $f^{(k)}$ for definida e contínua em $\mathbb{R}$. Uma função suave $f : I \to \mathbb{R}$ é real analítica se para todo $t \in I$ existe $\epsilon > 0$ tal que para todo número real h com $|h| < \epsilon$ a série de Taylor

$$\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} h^k$$

converge e vale $f(t+h)$.

Problema 7 (7 pontos)

Demonstre que para quaisquer inteiros n e p, $0 < n \leq p$, todas as raízes do polinômio abaixo são reais:

$$P_{n,p}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{p}{j} \binom{p}{n-j} x^j.$$