O Teorema de Poncelet usando feixe de círculos

Luíze D'Urso

18 de julho de 2022

Teorema de Poncelet: Sejam α e β duas cônicas. Suponha que exista um polígono de n lados $P_0P_1...P_{n-1}$ (possivelmente estrelado) que tem α como cônica inscrita e β como cônica circunscrita. i.e. para todo $i \in \mathbb{Z}_n$, α tangencia todos os lados P_iP_{i+1} do polígono e β contém todos os vértices P_i.

Então, existem infinitos polígonos inscritíveis por α e circunscritíveis por β. Além disso, para todo ponto Q_0 em β, existe um polígono $Q_0Q_1...Q_{n-1}$ de n lados com essa propriedade. Acompanhe a Figura 1

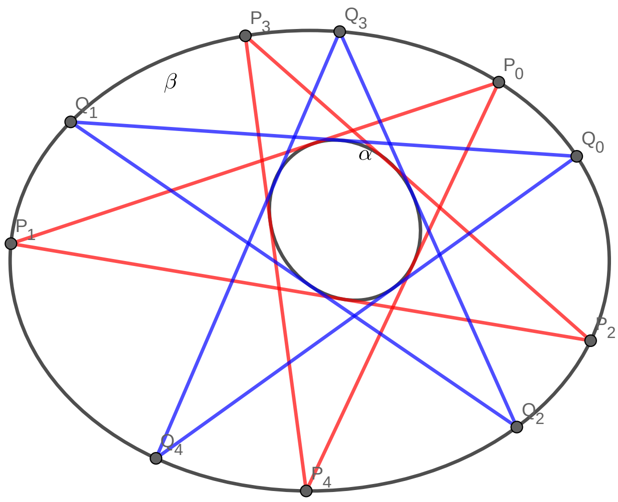

Figura 1: O Teorema de Poncelet

O lema 1 a seguir nos garantirá que podemos considerar sem perda apenas o caso em que α e β são círculos.

Lema 1: Dadas duas cônicas α e β, existe uma transformação projetiva que as leva em dois círculos α' e β'.

Como transformações projetivas levam retas em retas e cônicas em cônicas, a estrutura do Teorema se mantém preservada com a aplicação de tais transformações. Sendo assim, podemos provar o Teorema para α' e β' e usar a transformação inversa para retornar ao problema original.

Teorema auxiliar: Sejam dois círculos α e β, com α no interior de β. Sejam P_0 e P_0' dois pontos em β, $P_1 = F(P_0)$ e $P_1' = F(P_0')$. Existe um círculo do feixe de círculos $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$ definido por α e β que tangencia os segmentos P_0P_0' e P_1P_1'.

Sejam $P_0, P_0', P_1, P_1' \in \beta$ como no enunciado, $Q, Q' \in \alpha$ os pontos de tangência de α com P_0P_1 e $P_0'P_1'$ respectivamente, R o ponto de interseção de P_0P_1 com $P_0'P_1'$ e ainda T_0, T_1 as interseções da reta que liga Q e Q' com P_0P_0' e P_1P_1' respectivamente. Acompanhe na Figura 2.

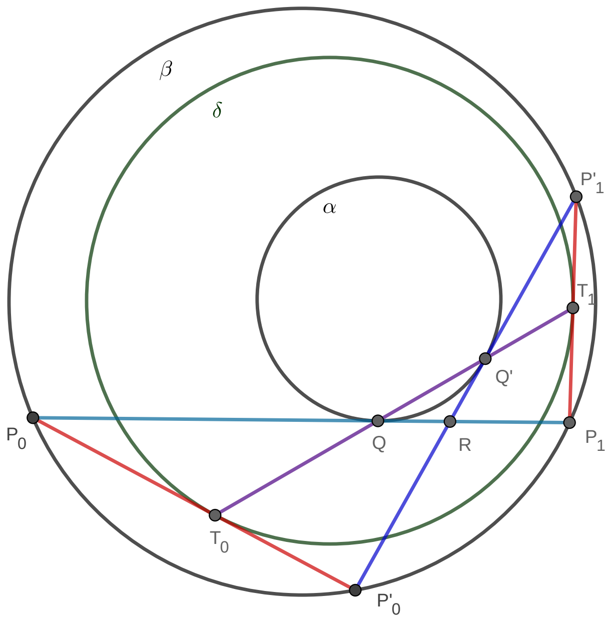

Figura 2:

A demonstração do Teorema auxiliar segue a partir dos dois seguintes lemas:

Lema 1: Existe um círculo δ tangente a P_0P_0' e P_1P_1' nos pontos T_0 e T_1.

Demonstração. A semelhança entre os triângulos P_0T_0Q e $P_1'T_1Q'$ nos garante que existe um círculo δ tangente a P_0P_0' e P_1P_1' nos pontos T_0 e T_1. □

Lema 2: $\delta \in \mathcal{F}(\alpha, \beta)$, ou equivalentemente, $\beta \in \mathcal{F}(\alpha, \delta)$.

Demonstração. Para demonstrar o lema, veja que β é o lugar geométrico dos pontos X cuja razão $\dfrac{P_\alpha(X)}{P_\delta(X)} = k_0^2$, onde $k_0 = \dfrac{P_0Q}{P_0T_0}$.

□

Dem (Teorema de Poncelet): Sejam $P_0, P_0' \in \beta$ quaisquer. Se definirmos $P_{k+1} = F(P_k)$ e $P_{k+1}' = F(P_k')$ para $k = 0, 1, ...$, então existe um círculo $\delta \in \mathcal{F}(\alpha, \beta)$ tangente a P_0P_0' e P_1P_1'. Mas também existe um círculo do mesmo feixe $\delta' \in \mathcal{F}(\alpha, \beta)$ tangente a P_1P_1' e P_2P_2'. Podemos concluir que $\delta = \delta'$, pois há um único círculo em $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$ tangente a P_1P_1'. Por indução podemos concluir que δ é tangente a P_kP_k' para todo $n \in \mathbb{N}$.

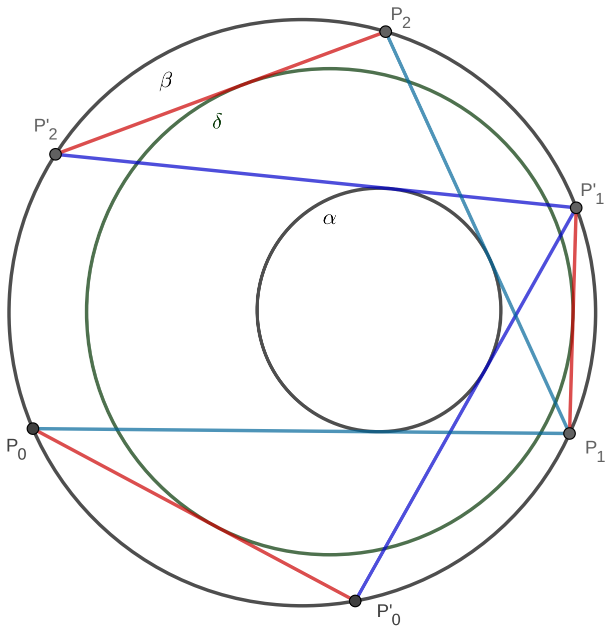

Figura 3:

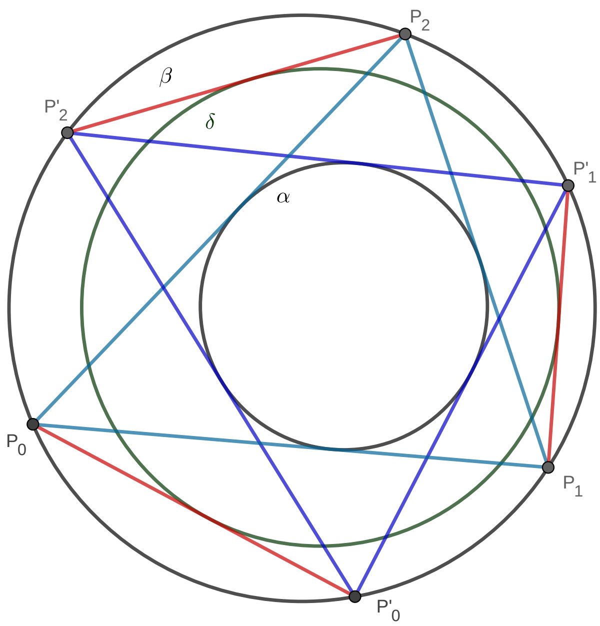

Figura 4: