O Paradoxo de Banach - Tarsky

Prof. Thiago Dias - UFRPE

Um paradoxo é um conceito que é ou parece contrário ao senso comum. Neste texto nós apresentaremos uma demonstração autosuficiente do surpreendente resultado elaborado por Banach e Tarski em 1924: Seja uma bola sólida em $\mathbb{R}^3$ é possível particioná-la em um número finito de pedaços e então reuni-los novamente para formar *duas* bolas sólidas com a mesmo volume da primeira.

1 Grupos Paradoxais

Definição. *Seja G um grupo agindo em um conjunto X e suponha $E \subseteq X$. E é dito G-paradoxal se para algum m,n existe $g_1, ..., g_m$ e $h_1, ..., h_n \in G$ e conjuntos $A_1, ..., A_m$ e $B_1, ..., B_n \subseteq E$ dois a dois disjuntos tais que $E = \cup g_i\,(A_i) = h_j\,(B_j)$.*

Quando o grupo das isometrias é omitido nós compreendemos que se trata das isometrias de X. Note que em nossa definição não é necessário que $A_i \cup B_j$ seja uma cobertura para E. Note ainda que os $g_i(A_i)$ ou $h_j(B_j)$ podem não ser dois a dois disjuntos.

Teorema 1.1. *S^1 é contavél RSO_2 paradoxal, isto é, paradoxal com um número finito de pedaços.*

Demonstração. Considere RSO_2 subgrupo de SO_2 gerado por rotações de multiplos racionais de 2π radianos. Seja H um conjunto escolha para as classes de SO_2/RSO_2.

Agora considere $M = \{\sigma(1,0) : \sigma \in H\}$. Desde que RSO_2, é contavel, nós podemos escreve-lo como $\{\rho_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Seja $M_i = \rho_i\,(M)$.

Afirmação: M_i é partição contavel de S^1

Seja $x \in S^1$, temos que $x = \gamma(1,0)$, $\gamma \in SO_2$. Existe $\alpha \in H$ tal que $\gamma \sim \alpha$. Portanto $\alpha = \gamma\rho_i \in RSO_2 \Rightarrow \gamma = \alpha\rho_i^{-1}$. Como $\rho_i^{-1} \in RSO_2$ e $\alpha \in H$, logo $x = \gamma(1,0)$ pertence a algum dos M_i.

Agora suponha que $x \in M_i \cap M_j$. Isso os diz que $x = \rho_i\sigma_1(1,0) = \rho_j\sigma_2(1,0)$, com $\rho_i, \rho_j \in RSO_2$, $\sigma_1, \sigma_2 \in H$. Como a ação de SO_2 em S_1 é fiel, temos que $[\sigma_1] = [\sigma_2] \in SO_2/RSO_2$. Isso contraria a construção de H.

Como cada elemento em $\{M_2, M_4, M_6, ...\}$ pode ser individualmente rotacionado para obter $\{M_1, M_2, M_3, ...\}$ cuja união é S^1, e podemos fazer o mesmo para $\{M_1, M_3, M_5, ...\}$, temos que S^1 é contavel SO_2-Paradoxal.

□

Podemos aplicar o conceito de decomposição paradoxal para mostrar que não existem certos tipos de medida:

Corolário 1. *Não existe medida aditivamente contável invariante por rotações de medida total igual a 1 definida para todos os subconjuntos de* S^1

Demonstração. Suponha que uma tal função μ existe. Seja $A = \{M_1, M_3, M_5, ...\}$ e $B = \{M_2, M_4, M_6, ...\}$, então nós temos: $1 = \mu(A) + \mu(B) = \mu(S^1) + \mu(S^1) = 2$ □

No paradoxo acima as transformações permitidas são as isometrias no espaço, como o número de pedaços da decomposição é infinito, o resultado obtido não causa muita perplexidade. No momento em que nos restringimos que o número de peças da decomposição seja finito, qualquer paradoxo que persistir é muito contra-intuitivo.

2 Equidecomposição

O próximo exemplo que discutiremos não é um paradoxo no sentido técnico, porém é um exemplo muito interessante, que vamos utilizar mais tarde. Nós vamos ver que $S^1 \setminus P$, pode ser particionado em dois conjuntos, e esses conjuntos podem ser rearranjados para formar um círculo completo.

Definição. *Seja G agindo em um conjunto X, e seja $A, B \subseteq X$. A e B são ditos G-equidecompostos se A e B podem ser particionados em $A_1, ...A_n$ e $B_1, ..., B_n$, de modo que A_i é congruente a B_i, isto é, existe um $g_i \in G$ tal que $g_i(A_i) = B_i$ Notação: $A \sim_G B$*

Deste modo A pode ser particionado em um número finito de subconjuntos e rearranjado para formar B.

Exercício 1. *$\sim_G$ é relação de equivalência.*

Lema 2.1. *Se $I \sim_G J$ e I é paradoxal, então J também é.*

Demonstração. De fato, se $I \sim J$ então I e J podem ser particionados em $I_1, ...I_k$ e $J_1, ..., J_k$, tal que existe um $x_i \in G$ tal que $x_l(I_l) = J_l$. Sendo I G-paradoxal temos que existem m, n tais que $g_1, ..., g_m$ e $h_1, ..., h_n \in G$ e conjuntos $A_1, ..., A_m$ e $B_1, ..., B_n \subseteq I$ dois a dois disjuntos tais que $I = \cup g_i(A_i) = \cup h_j(B_j)$. Seja $A_{li} = I_l \cap g_i(A_i)$ e $B_{lj} = I_l \cap h_j(B_j)$, $x_{lj} = x_{li} = x_l$. Temos $g_i(A_{li})$, $g_j(B_{lj}) \subset B_m$ e $\cup_{i=1}^{n} A_{li} = I_l$, $\cup_{j=1}^{m} B_{lj} = I_l$. Portanto $\bigcup_{\substack{1 \leq l \leq k \\ 1 \leq i \leq m}} x_{li}(A_{li}) = \bigcup_{\substack{1 \leq l \leq k \\ 1 \leq j \leq m}} x_{lj}(B_{lj}) = B$. Logo B é G paradoxal. □

Teorema 2.1. *$S^1 \setminus pt$ pode ser equidecomposto para S^1*

Demonstração. Por omissão do grupo, nós devemos entender que se trata do grupo das isometrias de $\mathbb{R}^2$. Consideremos $\mathbb{R}^2$ identificado como o plano complexo. Sem perca de generalidade suponha $pt = 1 = \exp^{i0}$. Seja $A = \{\exp^{in} : n \in \mathbb{N}\}$ e seja $B = \{S^1 \setminus 1\} \setminus A$. Como 2π é irracional se $\exp^{in} = \exp im \Rightarrow m = n$. Então deixemos B fixado, e rotacionemos cada elemento de A por 1 radiano, usando a isometria $\rho(z) = \exp^{-i} z$. Esta rotação faz cada ponto voltar 1 radiano. Note que $\rho(A) = A \cup 1$, $B \cup \rho(A)$, nos dá o circulo completo. Então $S^1 \setminus pt$ e S^1 são equidecompostos com $A_1 = A, A_2 = B$ $B_1 = \rho(A) = A \cup 1, B_2 = B$, $g_1 = e$, $g_2 = \rho$. □

A construção acima nos dá uma interessante idéia para a construção de paradoxos. Aqui nos consideramos a imagem de um ponto (no caso $pt = 1 = \exp^{i0}$) por um subsemigrupo gerado por $\phi(z) = \exp^{iz}$. Como este subsemigrupo era livre, podemos usar as rotações inversas, para que deste modo os pontos se movessem de maneira a obter o círculo completo.

De fato esta idéia serve de base para o seguinte exemplo:

Teorema 2.2 (Paradoxo de Sierpiński-Mazurkiewicz). *Existe subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que é paradoxal.*

Demonstração. Nosso objetivo é identificar duas isometrias ρ, τ que geram o subsemigrupo S, das isometrias de $\mathbb{R}^2$, novamente identificado com $\mathbb{C}$. Então nos escolhemos um ponto x do plano e consideramos $E = \{w(x) : w \in S\}$, isto é, todas as imagens deste ponto por palavras em S.

Se para todo $a, b \in E$, temos $\rho(a) \neq \tau(b)$, então temos que E é paradoxal por que $\rho(E) \cap \tau(E) = \emptyset$ e $\rho^{-1}(\rho(E)) = \tau^{-1}(tau(E)) = E$.

Escolha $\rho(z) = rz$, onde $r = \exp^{i\theta}$ é um numero complexo trancedental. Este θ, existe desde que existe uma quantidade contável de numeros algébricos no círculo. Agora escolha $\tau(z) = z + 1$, estas são duas isometrias no plano.

Seja $x = 0$. Então para quaisquer duas palavras em w_1, w_2 em S queremos provar que $\tau(w_1(0)) \neq \rho(w_2(0))$. De fato, $\tau(w_1(0)) - \rho(w_2(0)) = 0$ é uma equação polinomial na variável r. Se essa equação polinomial tiver solução isso contradiz a escolha de r. Logo o resultado segue. □

Como E é contavél este teorema não apresent a nenhuma surpresa em termos de medida de Lebesgue, pois pode-se mostrar que $0 = m(E) = m(\rho(E)) + m(\tau(E)) = m(E) + m(E) = 0 + 0 = 2.0$. Desde que para construr E não utilizamos o axioma da escolha. Com isso nos vemos que o axioma da escolha não é responsável pela existencia de paradoxos.

Desde que $\rho(w_1(0)) \neq \tau(w_2(0))$ nos podemos concluir que S é subsemigrupo livre, pois se duas palavras reduzidas w_1 e w_2 são iguais, então cancelando a esquerda, obtemos que: $\rho(w_1') = \tau(w_2')$, oque nos dá $\rho(w_1(0)) = \tau(w_2(0))$, contradizendo a hipótese, ou obtemos $1 = w'$, o que nos dá $(\tau(0)) = w'(\tau(0))$ ou $\rho(0) = w'(\tau(0))$, também contradizendo a hipótese. Esse tipo de argumento tem um grande papel na produção de paradoxos, como veremos na próxima seção.

Uma questão relacionada com o Paradoxo de Sierpiński-Mazurkiewicz é determinar se todo subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$ é paradoxal.

Devemos notar que nos dois exemplos anteriores, o paradoxo envolvia encontrar um grupo ou subgrupo que atrvés de sua ação sobre o conjunto, faz o paradoxo "surgir". Dessa maneira é natural estudar grupos paradoxais, onde o grupo age por multiplicações a esquerda.

3 Grupos Paradoxais

O exemplo primário de um grupo paradoxal é o grupo livre em dois geradores (às vezes, chamado um grupo livre de posto 2). Note que um grupo livre F com dois geradores a, b é o grupo de todas palavras finitas em $a^{\pm 1}$, $b^{\pm 1}$ sem pares de letras inversas adjacentes, e a operação é a justaposição com remoção de algum possível par de letras inversas adjacentes.

Teorema 3.1. *O grupo livre F com dois geradores σ, τ é F-paradoxal.*

Demonstração. Seja $B(\rho) = \{$ palavras em F começando a esquerda com $\rho\}$, onde ρ pode ser σ, τ, σ^{-1}, τ^{-1}.

Então $F = 1 \cup B(\sigma) \cup B(\sigma^{-1}) \cup B(\tau) \cup B(\tau^{-1})$. Mas $F = (\sigma) \cup \sigma B(\sigma^{-1})$ e $F = (\tau) \cup \tau B(\tau^{-1})$ assim vemos que F é paradoxal.

□

Para assegurar que o paradoxo surge em conjuntos bem definidos disjuntos, necessitamos de uma condição na a cão de G, a saber, que nenhum elemento além da identidade fixa algum ponto do conjunto.

Teorema 3.2. *Suponha que G é um grupo paradoxal agindo sobre X sem pontos não-triviais fixados. Então X é G-paradoxal.*

Demonstração. Se G é paradoxal, então para alguns m, n existem $g_1, ..., g_m$ e $h_1, ..., h_n \in G$ e conjuntos $A_1, ..., A_m$ e $B_1, ..., B_n \subseteq G$ dois a dois disjuntos tais que $G = \cup g_i\,(A_i) = \cup h_j\,(B_j)$.

Seja um conjunto escolha M para as G-órbitas de X. Temos que $\{g(M) : g \in A_i\}$, particiona X, pois G age sobre X sem pontos não triviais fixados.

Seja $A'_i = \cup\{g(M) : g \in A_i\}$ e $B'_j = \cup\{g(M) : b \in B_j\}$. Se $x \in X$ e $x \in A'_i \cap A'_j$ temos que $x = gm$ com $g \in A'_i$, $m \in M$ e $x = hn$ com $h \in A'_j$, $n \in M$. Daí teriamos que m e n pertencem a orbita de X, o que contradiz a construção de M. Então $\{A'_i\}$ e $\{B'_j\}$ são dois a dois disjuntos. Como todo $g \in G$ pode ser escrito nas formas $g = g_i a_i, \quad g = h_j b_j$ nós podemos ver que $X = \cup g_i A'_i = \cup h_j B'_j$. Portanto X é G-paradoxal.

□

Note que esta idéia foi usada de uma maneira sutil no Teorema (3.2), onde o grupo agindo sobre S^1 era RSO_2, as órbitas eram as classes de equivalência de SO_2/RSO_2, e o uso implícito do paradoxo em RSO_2 eram que esse grupo contável era transitivo, e portanto podia ser enumerado e decomposto em partes "pares"e "ímpares"como fizemos para as imagens de M na demonstração daquele teorema. Agora, nos defrontamos com uma questão muito interessante: quais grupos são paradoxais? a resposta para esta na investigação de grupos transportantando uma medida finitamente gerada de medida total 1, definida em todos os subconjuntos, a qual é invariante por multiplicação à esquerda. Tais grupos são chamados grupos "tratáveis".

Como corolário do teorema (3.5), temos uma afirmação que fala um pouco mais sobre os grupos que são paradoxais:

Exercício 2. *Se um grupo G, contem um grupo paradoxal H, então G é paradoxal.*

Deste corolário temos o seguinte como consequencia imediata:

Corolário 2. *Todo grupo que possui um subgrupo livre com 2 geradores é paradoxal.*

A recíproca do teorema (3.6) é verdadeira:

Teorema 3.3. *Se X é G paradoxal, então G é paradoxal*

Demonstração. Suponha que X é G-paradoxal, isto é existem m, n e $g_1, ..., g_m$ e $h_1, ..., h_n \in G$ e conjuntos $A'_1, ..., A'_m$ e $B'_1, ..., B'_n \subseteq X$ dois a dois disjuntos tais que $X = \cup g_i\,(A_i) = h_j\,(B_j)$.

Escolha H, alguma orbita de G em X, e um ponto $x \in H$. Defina $A_i = \{g : g(x) \in H \cap A'_i\}$ e $B_j = \{g : g(x) \in H \cap B'_j\}$. Desde que A'_i e B'_j são dois a dois disjuntos, A_i e B_j são dois a dois disjuntos.

Temos que

$$\cup g_i(A_i) = \cup\{g_i g : g(x) \in H \cap A'_i\} = \cup\{g_i g : g_i g(x) \in H \cap g_i(A)'_i\} = \cup\{g' : g'(x) \in X\} = G.$$

Similarmente nos obtemos $G = \cup h_j(B_j)$. Logo G é paradoxal. □

Nos estamos interessados em aplicar este teorema quando $G = F$, o subgrupo com 2 geradores, e vendo F como subgrupo de G_3, o grupo das isometrias do espaço. Ainda não sabemos o que fazer com pontos triviais fixados. Quando aprendermos isso seremos capazes de provar o paradoxo de Banach-Tarski.

4 Paradoxo de Hausdorff

Em 1914, na tentativa de mostrar a não existencia de certas medidas na esfera, Hausdorff construiu o seguinte paradoxo: Exceto por um número contável de pontos, S^2 pode ser particionado em em 3 subconjuntos $A \simeq B \simeq C \simeq A \cup B$, onde $A \simeq B$ denota que A pode ser obtido de B através de uma isometria .

Nosso objetivo sera encontrar duas rotações do S^2 que geram um grupo liver isomorfo a $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$. Estas são rotações de $2\pi/3$ e π sobre um eixo cujo angulo interior é algum θ com 2θ trancedental.

Teorema 4.1. *Existem duas rotações independentes ϕ e ρ que fixam a origem em R^3. Logo, se $n \geq 3$, SO_n contém um subgrupo livre com 2 geradores.*

Demonstração. Sejam ϕ e ρ duas rotações de arccos(3/5) sobre o eixo z e o eixo x respectivamente. Então temos:

$$\phi^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 3/5 & \mp 4/5 & 0 \\ \pm 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & \mp 4/5 \\ 0 & \pm 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

De fato, muitos pares de rotações são independentes. De fato poderiamos ter usado no lugar de arccos(3/5), poderiamos usar arccos(r), onde r é racional e defirente de 0, $\pm 1/2$, ± 1

Nossa intenção é mostrar que nenhuma palavra reduzida em $\phi^{\pm 1}$ e $\rho^{\pm 1}$ é igual a identidade. Se existe uma tal palavra, então podemos conjuga-la se necessário para obter uma palavra $w_0$terminando em ϕ que é igual a identidade.

Afirmação: Se w é uma palavra terminando em ϕ, então $w(1, 0, 0)$ é da forma $(a, b, c)/5^k$ onde a, b, c são inteiros e b não é divisivel por 5.

Provemos esta afirmação por indução no comprimento das das palavras.

Nós começamos com uma palavra w de comprimento 1. Então por hipotese necessariamente $w = \phi^{\pm}$, e podemos checar que $w(1,0,0) = (3,4,0)/5$.

Suponha agora que toda palavra w terminando em ϕ de comprimento $n-1$ satisfaz $w(1,0,0) = (a', b', c')/5^{n-1}$

Seja w uma palavra de comprimento n terminada em ϕ. Então necessariamente $w = \phi^{\pm 1} w'$, ou $w = \rho^{\pm 1} w'$, onde w' é uma palavra de comprimento $n-1$ terminando em ϕ. Portanto $w'(1,0,0) = (a', b', c')/5^{n-1}$, então $w(1,0,0) = (a,b,c)/5^n$, onde:

$$a = 3a' \mp 4b', \; b = 3b' \pm 4a', \; c = 5c' \;\text{ se }\; w = \phi^{\pm 1} w' \tag{1}$$
$$\text{ou } a = 5a', \; b = 3b' \mp 4c', \; c = 3a' \pm 4b' \;\text{ se }\; w = \rho^{\pm 1} w' \tag{2}$$

Claramente vemos que a, b e c são inteiros. Vamos ver agora que b não é divisivel por 5. Nos temos que w pode ser escrita em uma des seguintes formas:

$$\text{se } w = \phi^{\pm 1}\rho^{\pm 1} \upsilon, \text{ então } b = 3b' \pm 4a' \text{ com } 5|a'$$
$$\text{se } w = \rho^{\pm 1}\phi^{\pm 1} \upsilon, \text{ então } b = 3b' \pm 4c' \text{ com } 5|c'$$
$$\text{se } w = \rho^{\pm 1}\rho^{\pm 1} \upsilon, \text{ ou } w = \phi^{\pm 1}\phi^{\pm 1} \upsilon \text{ então } b = 6b - 25b"$$

Onde υ é uma palavra terminada em ϕ e $a"$, $b"$, $c"$ são tais que $\upsilon(1,0,0) = (a", b", c")/5^k$.

A validade das afirmações feitas no primeiro e segundo caso decorrem das equações (3.1) e (3.2).

Para o terceiro caso temos:

$b = 3b' \pm 4a' = 3b' \pm (12a" \mp 16b") = 3b' + 9b" \pm 12a - 16b - 9b" == 3b' + 3(3b" \pm 4a") - 25b" = 6b' - 25b"$.

Analogamente para o quarto caso temos:

$b = 3b' \pm 4c' = 3b' \pm (12c" \mp 16b") = 3b' + 9b" \pm 12c - 16b - 9b" == 3b' + 3(3b" \pm 4c") - 25b" = 6b' - 25b"$

Logo se w_0 é palavra terminada em ϕ igual a identidade $w_0(1,0,0) = (1,0,0)$. Por outro lado pala afirmação acima $w_0 = (a,b,c)/5^k$. Assim obtemos uma contradição, portanto SO_3, contém subgrupo livre com dois geradores, a saber, $F =< \rho, \phi >$. $\square$

De posse desse resultado vamos demonstrar o seguinte:

Teorema 4.2 (Paradoxo de Hausdorff)**.** *Existe conjunto contável D tal que* $S^2 \setminus D$ *é* SO_3 *paradoxal*

Demonstração. Seja F como no teorema anterior. Temos que todo $g \in F$ fixa exatamente dois pontos de S^2, a saber, os polos do eixo de rotação. Desde que os elemento de F são concatenações finites do conjunto finito ϕ, ρ, F é contável, e portanto D=$\{x \in S^2$: g(x)=x para algum $g \in F$, com $g \neq e_{SO_3}\}$ é contável.

Daí a ação de F em $S^2 \setminus D$ não tem pontos triviais não fixados, e pelo teorema (3.5), $S^2 \setminus D$ é SO_3 paradoxal. □

5 O paradoxo de Banach Tarski

Nos vamos ver abaixo que o conjunto contavél D descrito no teorema acima não é muito importante.

Teorema 5.1. S^2 *e* $S^2 \setminus D$ *são* SO_3*-equidecompostos.*

Demonstração. Esta demonstração é muito similar a demonstração de teorema (3.2). Escolha um eixo de rotações que não fixa nenhum ponto de D. A escolha deste eixo é possivel por que D é contável.

Considere agora as rotações α sobre este eixo tais que para algum $nin\mathbb{N}$, $\alpha^j(D) \cap D \neq \emptyset$. Desde que este é um conjunto contavél, podemos escolher uma rotação de um angulo θ ao longo do eixo escolhido denotada por ρ_θ tal que $D \cap \rho_\theta^n(D) \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, Nenhum multiplo de ρ_θ leva pontos de D em pontos de D. Note ainda que pela escolha de ρ_θ, $\rho_\theta^m \cap \rho_\theta = \emptyset$ se $m \neq m$.

Agora seja $A = \cup \rho_\theta^n : n \in \mathbb{N}^+$ e $B = (S^2 \setminus D) \setminus A$. Assim obtemos $S^2 \setminus D = B \cup A \sim_G B \cup \rho_\theta^1(A) = S^2$. □

Lema 5.1. S^2 *é paradoxal.*

Demonstração. Isto segue do teorema acima e do lema (1.1) □

Lema 5.2. $B^3 \setminus \{0\}$ *é* G^3*-paradoxal*

Demonstração. Desde que $B^3 \setminus \{0\}$ contém uma cópia de S^2 e sendo S^2 paradoxal, existem m, n, $g_1, ..., g_m$ e $h_1, ..., h_n \in G$ e conjuntos $A_1, ..., A_m$ e $B_1, ..., B_n \subseteq E$ dois a dois disjuntos tais que $E = \cup g_i\,(A_i) = h_j\,(B_j)$.

Denote por r_x, retas que passam pelo centro da esfera e por um $x \in S^2$. Seja $A_i' = \cup_{x \in A_i}(r_x \cap B^3 \setminus \{0\})$, similarmente $B_i' = \cup_{x \in B_i}(r_x \cap B^3 \setminus \{0\})$.

Logo temos que $B^3 \setminus \{0\} = \cup g_i\,(A_i') = \cup h_j(B_j')$, portanto $B^3 \setminus \{0\}$ é paradoxal.

□

Lema 5.3. $B^3 \setminus \{0\} \sim_G B^3$.

Demonstração. Escolha um círculo C tal que $\{0\} \in C$ e seja $C' = C \setminus \{0\}$. Temos $C' \subset B^3 \setminus \{0\}$. Pelo teorema dois $C' \sim_G C$. Então temos:

$$\begin{array}{rcl} B^3 \setminus \{0\} & = & B^3 \setminus (\{0\} \cup C') \cup C' \\ & \sim_G & B^3 \setminus (\{0\} \cup C') \cup (C' \cup 0) \\ & = & B^3 \end{array}$$

□

De posse destes dois lemas vamos provar o seguinte:

Teorema 5.2 (Banach-Tarski Paradoxo)**.** *B^3, uma bola solida em R^3 é G_3 paradoxal*

Demonstração. Pelo lemas (3.3) e (3.4) temos que $B^3 \setminus \{0\}$ é G^3-paradoxal e $B^3 \setminus \{0\} \sim_G B^3$ respectivamente. Portanto:

$$\begin{array}{rcl} B^3 & = & B^3 \setminus (\{0\} \cup \{0\} \\ & \sim_G & B^3 \setminus (\{0\} \cup B^3 \setminus \{0\} \cup \{0\} \\ & = & B^3 \setminus \{0\} \cup B^3 \\ & \sim_G & B^3 \cup B^3 \end{array}$$

Logo o resultado segue.

□