Problemas Olimpicos Envolvendo teoria de Grupos

Prof. Thiago Dias - UFRPE

1. (Olímpíada de Maio - 2017 N2) Ababa brinca com uma palavra formada pelas letras de seu nome seguindo as seguintes regras.

   - Se encontra uma letra A seguida de uma letra B pode substituir por BAA
   - Se encontra duas letras B consecutivas, Ababa pode apaga-las.
   - Se encontra três letras A consecutivas, Ababa pode apaga-las.

   Ababa Ababa começa com a palavra ABABABAABAAB. Com as regras anteriores, quantas letras tem a palavra mais curta que pode ser obtida? Porque não se pode chegar a uma palavra mais curta?

2. (ICM 2021 - Problema proposto por Tiago Landim) Para um número primo p, seja $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ o grupo das matrizes invertíveis 2×2 cujos coeficientes são as classes de resíduos mópulo p e seja S_p o grupo simétrico em p elementos. Mostre que não existe homomorfismo de grupos injetivo $\phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to S_p$

3. (Putman 2009) Existe um grupo abeliano finito G tal que o produto das ordens de todos os seus elementos é 2^{2009}

4. (USAMO 2008) Em uma certa conferência, todo par de matemáticos é formado ou por amigos ou por completos estranhos. Na hora do almoço cada participante come em uma das duas salas de jantar grandes disponíveis para o evento. Cada matemático insiste em comer em uma sala que contenha um número par de amigos. Prove que o número de maneiras em que os matemáticos podem ser dispostos na sala é uma potência de 2.

5. (ICM 2016) Seja n um inteiro, e $\mathbb{Z}_n$ o anel dos inteiros módulo n. Suponha que existe uma função $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ satisfazendo as seguintes três propriedades:

   (a) $f(x) \neq x$,

   (b) $f(f(x)) = x$,

   (c) $f(f(f(x+1)+1)+1) = x \quad \forall \quad x \in \quad \mathbb{Z}_n$

   Prove que $n \equiv 2 \mod 4$.

6. (Putman 2007) Suponha que um grupo finito possui exatamente n elementos de ordem p, onde p é um número primo. Prove que ou $n = 0$ ou p divide $n + 1$.

7. (ICM 2020) Seja G um grupo e $n \leq 2$ um inteiro Seja H_1 e H_2 subgrupos de G satisfazendo

$$[G : H_1] = [G : H_2] \text{ e } [G : (H_1 \cap H_2)] = n(n-1).$$

Prove that H_1 and H_2 são conjugados em G.
Nota: Aqui $[G : H]$ denota o índice do subgrupo H, isto é, o número de classes laterais a esquerda distintas. Dois subgrupos H_1 e H_2 são conjugados se existe um elemento $g \in G$ tal que $g^{-1}H_1g = H_2$

8. (ICM 2012) Dado um inteiro $n > 1$, seja S_n o grupo das permutações dos números $1, 2, ..., n$. Dois jogadores A e B jogam o seguinte jogo: Em cada turno eles selecionam exatamente um elemento de S_n. É proibido selecionar um elemento que já foi selecionado. O jogo termina quando os elementos selecionados forma um conjunto de geradores para S_n. O jogador que faz o último movimento perde. O Jogador A é quem faz o primeiro movimento. Qual dos dois jogadores possui uma estratégia vencedora?

9. (ICM 2010) Denote by S_n o grupo das permutações em n elementos. Suponha que G é um subgrupo de S_n, tal que para todo $\pi \in G \setminus \{e\}$ existe um único $k \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $\pi(k) = k$. Mostre que este k é o mesmo para todo $\pi \in G \setminus \{e\}$.

10. (Putman 2018) Sejam m e n inteiros positivos com $\text{mdc}(m, n) = 1$, e defina

$$a_k = \left\lfloor \frac{mk}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(m-1)k}{n} \right\rfloor,$$

para $k = 1, 2, 3, ..., n$. Suponha que se g e h são elementos do grupo tais que

$$gh^{a_1}gh^{a_2}...gh^{a_n} = e$$

então g e h comutam.