Tabuleiros

18 de julho de 2022

Ana B. Studart

⋄ Tabuleiros na OBM

Problema 01. (OBM 2011) Num tabuleiro 3×3 escrevemos os números de 1 a 9, um em cada casa. Em seguida, achamos a soma dos números de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal e contamos o número de somas que são múltiplos de três. Por exemplo, no tabuleiro ao lado as 8 somas (as três linhas, as três colunas e as duas diagonais) são números múltiplos de 3.
É possível que nenhuma das 8 somas seja um múltiplo de 3?
Lembre-se de que você deve justificar sua resposta.

Problema 02. (OBM 2009) Em cada casa de um tabuleiro n x n, colocamos um dos números 1,2,3,4, de modo que cada casa tem exatamente uma casa vizinha com o mesmo número. É possível fazer isso quando
(a) n = 2007?
(b) n = 2008?
Observação. Duas casas são vizinhas se possuem um lado em comum.

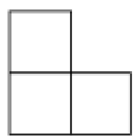
Problema 03. (OBM 2007) Quadradinhos iguais estão arrumados formando um tabuleiro n x n. Ludmilson e Ednalva jogam o seguinte estranho jogo. Cada jogada de Ludmilson consiste em retirar 4 quadradinhos que formem um quadrado 2 x 2. Cada jogada de Ednalva consiste em retirar apenas 1 quadradinho. Ludmilson e Ednalva jogamalternadamente, sendo Ludmilson o primeiro a jogar. Quando Ludmilson não puder fazer sua jogada, então Ednalva fica com todas as peças restantes do tabuleiro. Ganha o jogo aquele que possuir mais quadradinhos no final. Diga se é possível que Ednalva ganhe o jogo, não importando como Ludmilson jogue, em cada umdos seguintes casos:
a) n = 10.
b) Caso geral (n qualquer).

Problema 04. (OBM 2017) Seja $n > 1$ um inteiro e considere um tabuleiro n × n, em que algumas das n^2 casas foram pintadas de preto, e as restantes foram pintadas de branco. Prove que e possível escolhermos uma das n^2 casas do tabuleiro, de modo que, ao removermos completamente a linha e a coluna que a contém, haja um número diferente de casas pretas e de casas brancas, dentre as $(n-1)^2$ casas restantes.

Problema 05. (OBM 2020) Seja k um número inteiro positivo. Arnaldo e Bernaldo jogam um jogo em um tabuleiro 2020×2020. Inicialmente todas as casas do tabuleiro estão vazias. Uma jogada consiste em escolher uma casa vazia e colocar nesta uma ficha azul ou uma ficha vermelha.
Arnaldo vence o jogo se em algum momento existirem k casas consecutivas em uma mesma linha ou coluna preenchidas com fichas de uma mesma cor. Bernaldo vence se todo o tabuleiro é preenchido sem que Arnaldo vença. Arnaldo é o primeiro a jogar e, a partir de então, cada jogador joga alternadamente.
Quais são os valores de k para os quais Arnaldo tem uma estratégia vencedora?

⋄ Tabuleiros em outras olimpíadas

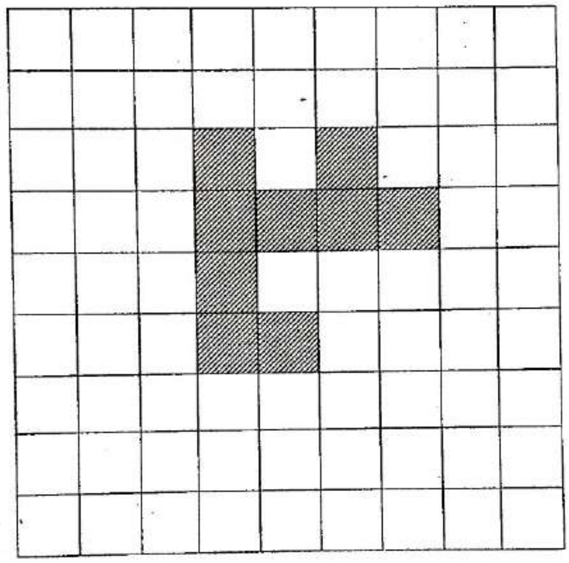
Problema 06. (Olimpíada de Maio 2004) Em um quadrado 9×9 é dividido em quadradinhos 1×1, colocamos, sem sobreposições, sem deixar buracos e sem transpor o tabuleiro, peças como a seguinte:



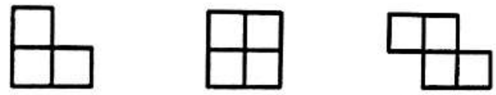
Observação: a peça pode ser girada. Cada peça cobre exatamente 3 casinhas.

(a) A partir de um tabuleiro vazio, qual o máximo de peças do tipo acima que podemos colocar?

(b) A partir do tabuleiro com as três peças posicionadas como mostra na figura abaixo, qual o número máximo de peças que podem ser colocadas no tabuleiro?



Problema 07. (Olimpíada de Maio 2007) Matias cobriu um tabuleiro 7×7, dividido em casinhas 1×1, com peças dos seguintes tipos:



sen buracos, sobreposições e sem ultrapassar os limites do tabuleiro.

Cada peça do tipo 1 cobre exatamente 3 casinhas e cada peça do tipo 2 ou 3 cobre exatamente 4 casinhas.

Determine a quantidade de peças do tipo 1 que Matias pode ter usado. (As pelas podem ser giradas e/ou espelhadas).

Problema 08. (EGMO 2018) Um dominó é uma peça de tamanho 1×2 ou 2×1. Seja $n \geq 3$ um inteiro. Dominós são colocados em um tabuleiro quadriculado $n \times n$ de maneira que cada dominó cobre exatamente 2 casas do tabuleiro e os dominós não se sobrepõem. O *valor* de uma linha ou coluna do tabuleiro é o número de dominós que cobre pelo menos uma casa dessa linha ou coluna. Uma configuração de dominós no tabuleiro é chamada balanceada se existe algum $k \geq 1$ tal que cada linha e cada coluna tem valor k.

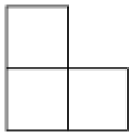
Prove que uma configuração balanceada existe para todo $n \geq 3$, e encontre o menor número de dominós necessários para tal configuração.

Problema 09. (EGMO 2013) Determine todos os inteiros positivos m para os quais $m \times m$ pode ser dividido em 5 retângulos, cujos lados são os inteiros $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ em alguma ordem.

Problema 10. (EGMO 2015) Um dominó é uma peça 2×1 ou 1×2. Determine de quantas maneiras podemos colocar exatamente n^2 dominós, sem sobreposições, em um tabuleiro $2n \times 2n$ de forma que todo quadrado 2×2 contém pelo menos dois quadrados 1×1 vazios que estão na mesma linha ou coluna.

Problema 11. (EGMO 2016) Seja m um inteiro positivo. Considere um tabuleiro com $4m \times 4m$ quadradinhos. Dois quadradinhos diferentes são relacionados um com o outro se eles estão na mesma coluna ou na mesma linha. Nenhum quadradinho é relacionado com ele mesmo. Alguns quadradinhos são coloridos de azul, tal que cada quadradinho é relacionado a no mínimo dois quadradinhos azuis. Determine o número mínimo de quadradinhos azuis.

Problema 12. (CMC 2020) Considere um tabuleiro $n \times n$. A diagonal principal do tabuleiro contém n quadrados unitários que vão do canto superior esquerdo até o canto inferior direito. Nós temos uma quantidade ilimitada da seguinte peça:



As peças podem ser rotacionadas como quisermos. Nós queremos posicionar as peças de forma que cada uma cubra exatamente três quadrados unitários sem sobreposições, que nenhum quadradinho da diagonal principal seja coberto, e todos os outros quadrados unitários sejam cobertos exatamente uma vez. Para qual $n \geq 2$ isso é possível?