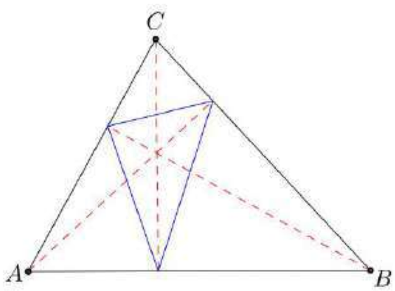
25^a Semana Olímpica - Recife
Triângulos e Quadriláteros Órticos

Prof. Adriano Regis Rodrigues

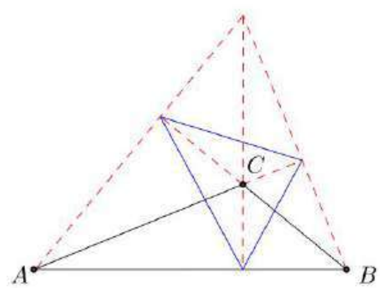
19 de julho de 2022

1 Triângulo Órtico

Dado um triângulo ABC, o triângulo cujos vértices são os pés das alturas de ABC é chamado de **Triângulo Órtico** do triângulo ABC.



Acutângulo



Obtusângulo

Note que um triângulo ABC retângulo não possui triângulo órtico, pois dois dos pés das alturas coincidem com o vértice do ângulo reto. No caso de ABC ser obtusângulo, seu triângulo órtico coincide com o triângulo órtico do triângulo acutângulo ABH, onde H é o ortocentro de ABC. O triângulo órtico de ABC é o triângulo pedal do ortocentro de ABC.

Mais geralmente, os vértices de um triângulo (acutângulo ou obtusângulo) e seu ortocentro possuem e seguinte propriedade: Qualquer um deles é o ortocentro do triângulo formado pelos outros três.

Propriedades:

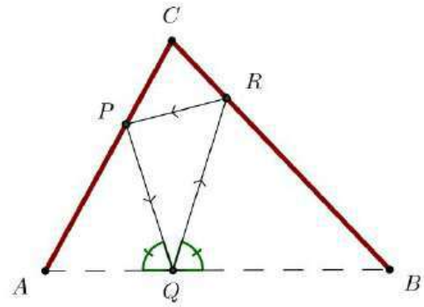
1. O ortcentro de um triângulo acutângulo é o incentro do seu triângulo órtico. Equivalentemente, as alturas de um triângulo acutângulo são as bissetrizes internas do seu triângulo órtico.
2. O ponto de Miquel de um triângulo ABC e seu órtico é o ortocentro de ABC.
3. Qualquer triângulo dado é o triângulo órtico de um triângulo acutângulo.
4. Em triângulo obtusângulo o vértice do ângulo obtuso é o incentro do seu triângulo órtico
5. Os lados do triângulo acutângulo são bissetrizes externas do seu triângulo órtico.
6. Os vértices de um triângulo acutângulo são os exincentros do seu triângulo órtico

Problemas

1. A área de um triângulo é dada pelo produto do seu circunraio pelo semiperímetro do seu triângulo órtico.

2. (Problema de Fagnano) Inscrever num triângulo acutângulo um triângulo de perímetro mínimo.

3. (OPEMAT - 2017) Um garoto se posiciona em um ponto Q localizado entre os pontos A e B (ver figura) e chuta uma bola que bate na parede representada por BC, seguindo até a parede AC e volta precisamente ao ponto Q de onde foi chutada (sem perder contato com o solo) de modo que $\angle AQP = \angle BQR$. Mostre que o ponto Q é pé da altura relativa ao lado AB no triângulo ABC.



Desafio

1. Seja R o raio do círculo circunscrito ao triângulo ABC e O o circuncentro. Se DEF é o triângulo pedal de um ponto P em relação ao triângulo ABC, então $[DEF] = \frac{|OP^2 - R^2|}{4R^2} \cdot [ABC]$

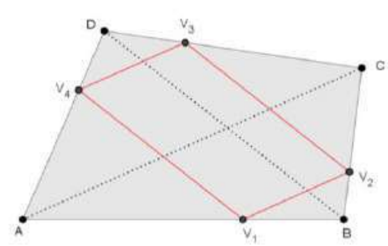
2. Os círculos exinscritos de um triângulo ABC de centros I_a, I_b e I_c tangenciam os lados BC, AC e AB nos pontos A', B' e C', respectivamente. Mostre que:

$$[ABC]^2 = [A'B'C'] \cdot [I_a I_b I_c]$$

2 Quadrilátero Órtico

O V-paralelogramo

Definição Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer. Escolhendo sobre o lado AB um ponto V_1 e traçando a partir desse ponto uma reta paralela à diagonal AC, determinamos sobre o lado BC um ponto V_2. A partir de V_2, traçamos uma nova paralela à diagonal BD cuja intersecção com o lado CD determina o ponto V_3. Por fim, a partir de V_3 trace uma paralela à diagonal AC e determine sobre o lado AD um ponto V_4. Com isso, obtermos quadrilátero $V_1V_2V_3V_4$.



Proposição 2.1 *Dado um quadrilátero $ABCD$ qualquer, o quadrilátero $V_1V_2V_3V_4$ obtido a partir de $ABCD$ é sempre um paralelogramo.*

2.1 O paralelogramo de Varignon ou M-paralelogramo

O que acontece quando um dos vértices desse V-paralelogramo é o ponto médio do lado ao qual está contido? O resultado a seguir nos diz que todos os outros vértices também serão os pontos médios de seus respectivos lados.

Proposição 2.2 *Quando o vértice V_1 é o ponto médio do lado AB os outros vértices do V-Paralelogramo também serão o ponto médio dos seus respectivos lados, isto é, $V_i = M_i$ para $i = 1, 2, 3$ ou 4.*

Tal paralelogramo é chamado de paralelogramo de Varignon ou M-paralelogramo. Sobre o paralelogramo de Varignon, obtido a partir de um quadrilátero simples, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.3 *Dado um quadrilátero $ABCD$ simples, convexo ou concavo, são válidas as seguintes afirmações:*

(i) A área do paralelogramo de Varignon de $ABCD$ tem medida igual à metade da área do quadrilátero.

(ii) O perímetro do paralelogramo de Varignon de $ABCD$ tem medida igual à soma das medidas das diagonais do quadrilátero.

2.2 V-alturas e alturas médias de um quadrilátero simples

Considere um V-paralelogramo de um quadrilátero $ABCD$ convexo. Seja H_i o ponto de intersecção entre a perpendicular baixada de V_i sobre o lado oposto ao que contém V_i. Cada segmento V_iH_i, onde i = 1, 2, 3 e 4, será chamado de V-altura de $ABCD$. Se as alturas estiverem associadas ao paralelogramo de Varignon, chamaremos de altura média de $ABCD$ ou M-altura

Exercício 2.4 *Dado um quadrilátero convexo qualquer, prove que sua área é igual à metade da soma do produto de dois lados opostos pela suas respectivas alturas médias.*

2.3 Quadriláteros órticos

Chamamos de um quadrilátero órtico do quadrilátero convexo $ABCD$, ao quadrilátero formado pelos pés das V-alturas. O denotamos por Q_o.

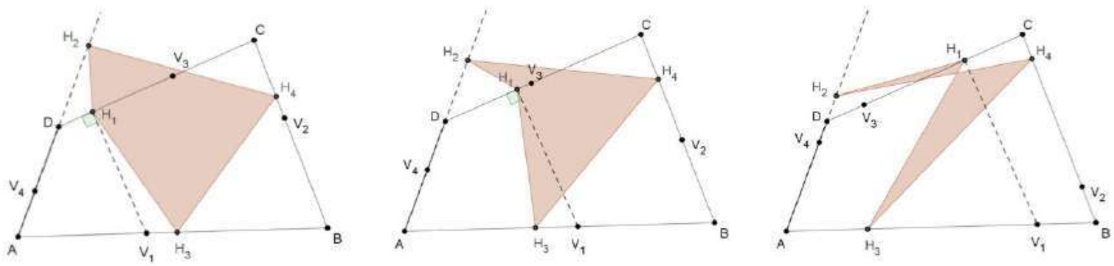
O quadrilátero órtico principal é aquele formado pelos pés das alturas médias. Denotamos por Q_{op}.

Para cada V_1 está associada uma V-altura e consequentemente um quadrilátero órtico.

(a) Quadrilátero órtico convexo

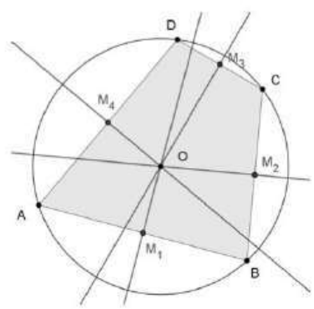
(b) Quadrilátero órtico concavo

(c) Quadrilátero órtico entrecruzado

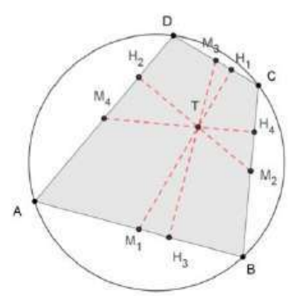


2.4 Pontos notáveis de um quadriláteros

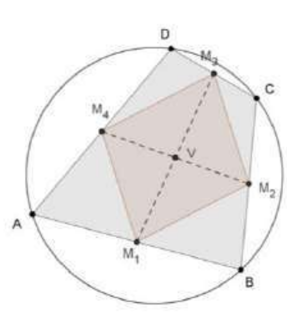
Definição 2.5 *O circuncentro de um quadrilátero cíclico ABCD, é o ponto de encontro das mediatrizes relativas a cada lado. Denotaremos por O.*



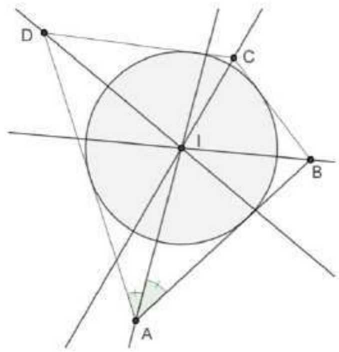
Definição 2.6 *Anticentro de um quadrilátero cíclico é o ponto de encontro das alturas médias. Denotamos por T.*



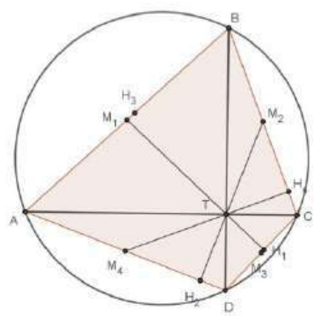
Definição 2.7 *O centróide de um quadrilátero é o ponto de encontro das diagonais do paralelogramo de Varignon. Denotamos por V.*



Definição 2.8 *O incentro de um quadrilátero circunscritível $ABCD$ é o ponto comum das bissetrizes internas de $ABCD$. Denotamos por I.*



Proposição 2.9 *(Brahmagupta) Em qualquer quadrilátero cíclico e ortodiagonal, as alturas médias são concorrentes no ponto de encontro das diagonais de quadrilátero.*

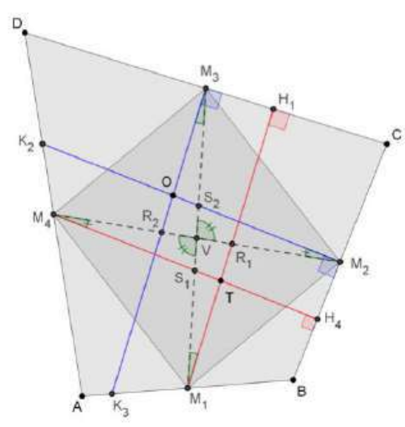


Teorema 2.10 *As alturas médias de um quadrilátero convexo $ABCD$ são concorrentes se, e somente se o quadrilátero $ABCD$ for cíclico.*

Demonstração

Considere as alturas médias M_1H_1 e M_4H_4, bem como as mediatrizes M_2K_2 e M_3K_3.

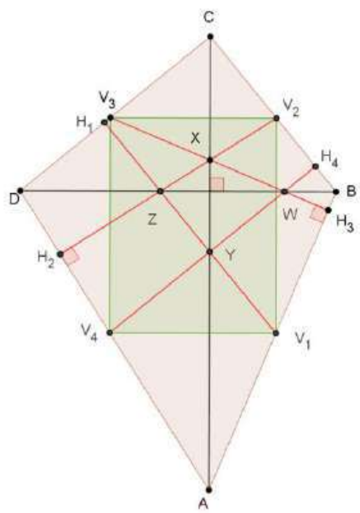
Realizando uma rotação $180°$ do plano, em torno do ponto V, percebemos que M_1 será transformado em M_3 e R_1 em R_2, assim como M_2 em M_4 e S_1 em S_2. Com isso, percebemos que as retas que contém as alturas médias são transformadas nas mediatrizes e vice-versa. Logo as mediatrizes são concorrentes se, e somente se as alturas médias são concorrentes.



Corolário 2.11 *Em um quadrilátero $ABCD$ convexo e cíclico, o circuncentro O é simétrico ao anticentro T, em relação ao centróide V.*

2.5 Quadriláteros ortodiagonais

Proposição 2.12 *Seja $ABCD$ um quadrilátero ortodiagonal. Um par de V-alturas de $ABCD$ relativas a lados consecutivos, são concorrentes em um ponto da diagonal que passa pelo vértice comum a tais lados.*



Teorema 2.13 *Sejam $ABCD$ um quadrilátero ortodiagonal, $\mathbf{V}$ um V-paralelogramo de $ABCD$ e seja $\mathbf{Q_o}$ o quadrilátero órtico de $ABCD$ associado a $\mathbf{V}$. Os vértices de $\mathbf{V}$ e os de $\mathbf{Q_o}$ pertencem a um mesmo círculo Γ.*

Corolário 2.14 *Se $ABCD$ é um quadrilátero ortodiagonal, então todos os quadriláteros órticos de $ABCD$ são inscritíveis numa circunferência, em particular o quadrilátero órtico principal de $ABCD$.* ***Círculo de oito pontos***