



21ª Vingança Olímpica
25ª Semana Olímpica – Recife, PE
20 de julho de 2022

-
- Não escreva mais de uma questão por folha.
 - Escreva seu nome em cada folha que usar.
-

Problema 1. Dizemos que um par (a, b) de inteiros positivos é bom se $\text{mdc}(a, b) = 1$ e, para cada par de conjuntos A, B de inteiros positivos tais que A e B são, respectivamente, sistemas completos de resíduos módulo a e b , existem $x \in A, y \in B$ tais que $\text{mdc}(x + y, ab) = 1$. Para todos a, k inteiros positivos, seja $f(N)$ o número de b tal que b tem k fatores primos distintos e (a, b) é bom. Prove que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(n) / \frac{n}{(\log n)^k} \geq e^{-k}$$

Problema 2. Seja ABC um triângulo e Ω o seu circuncírculo. As bissetrizes internas dos ângulos $\angle BAC, \angle ABC, \angle BCA$ intersectam BC, CA, AB em D, E, F , respectivamente. A reta perpendicular a EF que passa por D intersecta EF em X e AD intersecta EF em Z . O círculo que tangencia Ω internamente e é tangente a AB e AC toca Ω em Y . Prove que (XYZ) é tangente a Ω .

Problema 3. Um real positivo C é considerado n -vingativo se conseguimos colorir um tabuleiro $n \times n$ de modo que:

- Existe um número igual de quadrados de cada cor.
 - Em qualquer linha ou coluna, pelo menos Cn quadrados tem a mesma cor.
- a) Mostre que $\frac{3}{4}$ é n -vingativo para infinitos valores de n .
b) Mostre que não existe n tal que $\frac{4}{5}$ seja n -vingativo.

Problema 4. Seja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de números inteiros tal que $a_1 = 1$. a_{n+1} é definido como o menor inteiro positivo, distinto de a_1, a_2, \dots, a_n , tal que $a_{n+1}a_n + 1$ é coprimo com a_1, a_2, \dots, a_n . Prove que todos os inteiros positivos aparecem em $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Problema 5. Prove que existe $x < 5^{2022}$ inteiro positivo tal que

$$\{\varphi \sqrt[3]{x}\} < \varphi^{-2022}.$$

Linguagem: Português

Tempo: 5 horas.

Cada problema vale 7 pontos.

”-Minha impressão é: Como todos os problemas são autorais, nenhum problema será impossível.”
Trevizan, Bernardo