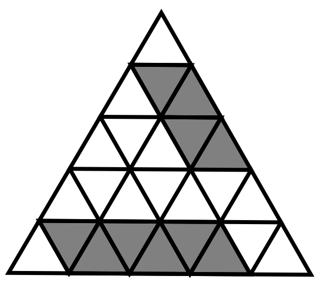
3^a Competição Elon Lages Lima de Matemática
28 de Outubro de 2022

1. Uma malha triangular é formada pela decomposição de um triângulo equilátero de lado 5 em 5^2 triângulos equiláteros de lado 1, como indicado na figura. Determine o número de paralelogramos que podem ser desenhados por segmentos que formam a malha.



(a) 15.

(b) 105.

(c) 126.

(d) 162.

(e) 315.

2. Determine a quantidade de números reais x que satisfazem a equação:

$$2^{x^2+x} + \log_2 x = 2^{x+1}.$$

(a) 0.

(b) 1.

(c) 2.

(d) 3.

(e) 4.

3. Seja a um inteiro positivo tal que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{25} = \frac{a}{25!}.$$

Encontre o resto de a na divisão por 13.

(a) 1.

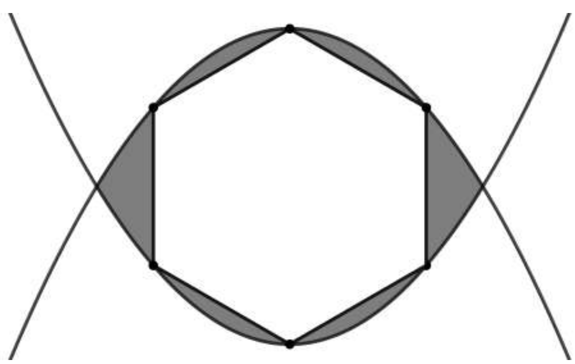
(b) 2.

(c) 3.

(d) 7.

(e) 12.

4. Um hexágono regular de lado 1 está inscrito na interseção de duas parábolas idênticas, mas que estão orientadas em direções opostas, i.e., uma é simétrica a outra em relação à reta que passa pelos seus pontos de interseção. Encontre a área da região sombreada, ou seja, a área que está entre as parábolas, mas que é externa ao hexágono.



(a) $\sqrt{6} - \sqrt{3}$.

(b) $8\sqrt{6} - 4\sqrt{3}$.

(c) $\dfrac{4\sqrt{6} - 3\sqrt{3}}{2}$.

(d) $\dfrac{8\sqrt{6} - 9\sqrt{3}}{6}$.

(e) $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{2}$.

5. Calcule o valor da soma

$$S = \sum_{k=1}^{2022} (-1)^k \cdot \frac{(k^2+k+1)}{k!}.$$

(a) $\dfrac{2023}{2022!}$.

(b) $-1 + \dfrac{2023}{2022!}$.

(c) $\dfrac{2022}{2021!}$.

(d) $1 + \dfrac{1}{2023!}$.

(e) $\dfrac{2022}{2023!}$.

6. Sejam $K = \{p_1, p_2, \ldots, p_{2022}\}$ um conjunto de 2022 números primos distintos e S o conjunto dos números naturais que admitem apenas esses primos em sua fatoração. Qual a maior quantidade de elementos que podemos escolher de S de modo que o produto de quaisquer dois deles **não** seja um quadrado perfeito?

(a) 2022.

(b) 2023.

(c) 2^{2021}.

(d) 2^{2022}.

(e) 2022^{2022}.

7. Calcule o valor da integral

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(2023x)}{\operatorname{sen} x} dx$$

(a) 0.

(b) 1.

(c) $\pi/2$.

(d) π.

(e) $-\pi$.

8. Em um poliedro convexo com m faces triangulares (e possivelmente faces de outros formatos), cada vértice percente a exatamente 4 arestas. Qual o menor valor possível de m?

(a) 5.

(b) 6.

(c) 8.

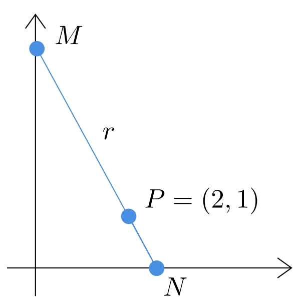
(d) 9.

(e) 10.

9. Pelo ponto $P = (2, 1)$, passa uma reta r que intersecta o eixo y em M e o eixo x em N, de forma que M tenha ordenada positiva e N tenha abscissa positiva. Determine a inclinação de r de modo que a soma

$$\frac{1}{PM} + \frac{1}{PN}$$

seja máxima



(a) -2.

(b) -1.

(c) $-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(d) $-1/2$.

(e) $-\sqrt{3}$.

10. O famoso *Problema da Basileia*[1] nos permite descobrir que

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots.$$

Vamos usar a série anterior para encontrar a soma de outra série. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina como a_n seu maior divisor positivo ímpar. Por exemplo, $a_{30} = 15$ e $a_{24} = 3$. Encontre o valor da soma:

$$S = \frac{a_1}{1^3} + \frac{a_2}{2^3} + \frac{a_3}{3^3} + \dots.$$

(a) $\dfrac{\pi^2}{7}$.

(b) $\dfrac{7\pi^2}{8}$.

(c) $\dfrac{\pi^2}{6}$.

(d) $\dfrac{7\pi^2}{6}$.

(e) $\dfrac{8\pi^2}{7}$.

11. No plano $\mathbb{R}^2$, uma rotação de 60° no sentido anti-horário com centro em $(0,0)$, seguida de uma rotação de 60° no sentido anti-horário com centro em $(1,0)$, seguida de uma rotação de 60° no sentido anti-horário com centro em $(2,0)$ é equivalente a

(a) uma única rotação de 180° com centro em $(1,0)$.

(b) uma reflexão com relação a $(0,0)$, seguida de uma translação por $(2,-\sqrt{3})$.

(c) uma rotação de 60° com centro em $(1,0)$, seguida de uma translação por $(2,\sqrt{3})$.

(d) uma rotação de 120° com centro em $(2,\sqrt{3})$, seguida de uma translação por $(1,2)$.

(e) uma reflexão com relação à reta $x = 0$, seguida de uma translação por $(2,\sqrt{3})$.

---

[1] Euler foi o primeiro a provar que

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots.$$

Além dele, alguns membros da família Bernoulli, que também viviam na cidade da Basileia, tentaram obter esse resultado. Por conta disso esse resultado também ficou atrelado ao nome da cidade.

12. Sejam $z = e^{\frac{2\pi i}{2023}} = \cos\dfrac{2\pi}{2023} + i\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{2023}$,

$$A = \{1, z, z^2, \ldots, z^{2022}\}$$

e

$$B = \{1, 1+z, 1+z+z^2, \ldots, 1+z+z^2+\ldots+z^{2022}\}.$$

Determine o número de elementos de $A \cap B$.

(a) 1.

(b) 2.

(c) 3.

(d) 7.

(e) 17.

13. Seja $A_{2022} = (a_{ij})$ a matriz 2022×2022 definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{3}, & \text{se } i = j \\ 1, & \text{se } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Encontre o valor de $\det A_{2022}$.

(a) 0.

(b) 1.

(c) -1.

(d) $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

(e) $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

14. Encontre o valor de

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(\cos x)dx + \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)dx.$$

(a) 0.

(b) $\pi/2$.

(c) π.

(d) 2π.

(e) π^2.

15. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Qual o menor inteiro $N > 0$ para o qual $A^N \equiv A \pmod{11}$? Aqui, dadas duas matrizes 2×2 X e Y com entradas inteiras, escrevemos $X \equiv Y \pmod{11}$ se cada entrada de X é congruente módulo 11 à entrada de Y na mesma posição.

(a) 11

(b) 16

(c) 121

(d) 110

(e) 120

16. 2022 dados honestos são lançados simultaneamente (neste problema, não faltam dados!). Qual a probabilidade de que a soma dos pontos obtidos seja um múltiplo de 5?

(a) $\frac{1}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{6^{2022}}\right)$

(b) $\frac{1}{5}$

(c) $\frac{1}{5} \cdot \left(1 + \frac{1}{6^{2022}}\right)$

(d) $\frac{1}{5} \cdot \left(1 + \frac{1}{6^{1011}} - \frac{1}{6^{2022}}\right)$

(e) $\frac{1}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{6^{2021}}\right)$

17. Considere uma esfera S de raio 1 e um icosaedro regular inscrito em S com vértices $V_1, V_2, \ldots, V_{12}$ (icosaedro regular é o poliedro regular que tem 20 faces triangulares, 30 arestas e 12 vértices). Seja P um ponto qualquer de S. Então a soma $PV_1^2 + PV_2^2 + \cdots + PV_{12}^2$

(a) é sempre igual a 24

(b) é sempre igual a 30

(c) é sempre igual a 20

(d) é sempre igual a 12

(e) depende do ponto P

18. O valor de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx$ é

(a) -1

(b) $-\dfrac{\pi}{4}$

(c) $-\dfrac{\pi^2}{6}$

(d) -2

(e) $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

19. Seja G um grupo finito **não** abeliano (i.e., existem elementos $a, b \in G$ tais que $a \cdot b \neq b \cdot a$). Então G pode ter

(a) 121 elementos

(b) 143 elementos

(c) 155 elementos

(d) 169 elementos

(e) 187 elementos

20. Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (3x - 4y, 4x + 3y)$. Seja T^i a composição de T i vezes e seja a_n a quantidade de inteiros i dentre $1, 2, \ldots, n$ tais que o vetor $T^i(2021, 2022)$ pertença ao primeiro quadrante. O limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$$

é igual a

(a) $1/2$

(b) 0

(c) $2021/4044$

(d) $2021/2022$

(e) $1/4$

21. O valor de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+(\operatorname{tg} x)^{2022}}$ é

(a) π

(b) $\pi/4$

(c) 1

(d) $1/2$

(e) $\sqrt{2}$

22. Considere a função real $S(x)$ definida pela série

$$S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{1+x^n-2x^{2n}} \quad (-1 < x < 1)$$

Escrevendo $S(x)$ em série de potências obtemos $S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$, em que o coeficiente a_{14} é igual a

(a) $a_{14} = 0$

(b) $a_{14} = -5418$

(c) $a_{14} = -175$

(d) $a_{14} = 1338$

(e) $a_{14} = 2732$

23. Considere a matriz 2×2 dada por

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Qual o valor da seguinte expressão?

$$M = \frac{T + T^2 + T^3 + \cdots + T^{2021}}{2021}$$

(a) $M = \begin{pmatrix} -2021 & 4044 \\ -1011 & 2023 \end{pmatrix}$

(b) $M = \begin{pmatrix} -4044 & 2021 \\ -2023 & 1011 \end{pmatrix}$

(c) $M = \begin{pmatrix} -4044 & 2021 \\ -1011 & 2022 \end{pmatrix}$

(d) $M = \begin{pmatrix} -2021 & 1011 \\ -4011 & 2023 \end{pmatrix}$

(e) $M = \begin{pmatrix} 2021 & -4044 \\ 1011 & -2023 \end{pmatrix}$

24. Seja S_5 o grupo das $5! = 120$ permutações de $1, 2, \ldots, 5$ (com a operação de composição de permutações). Dado $g \in S_5$, denotamos por $Z(g) = \{x \in S_5 \mid xg = gx\}$ o subgrupo formado por todos os elementos $x \in S_5$ que comutam com g. Qual o valor da seguinte expressão?

$$\frac{1}{|S_5|} \sum_{g \in S_5} |Z(g)|$$

(a) 7

(b) 5

(c) 12

(d) 20

(e) 10

25. Seja $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ o anel dos inteiros de Gauß. Quantas unidades possui o anel quociente $\mathbb{Z}[i]/(13^{2021})$? (Lembre que um elemento u em um anel A é uma *unidade* se ele possui inverso multiplicativo: existe $v \in A$ tal que $uv = vu = 1$.)

(a) 13^{2021}

(b) $12 \cdot 13^{2021}$

(c) $24 \cdot 13^{2021}$

(d) $(12 \cdot 13^{2020})^2$

(e) $12 \cdot 13^{2020}$