1ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 1 (6º ou 7º ano do Ensino Fundamental)

Testes

Importante: cada problema de 1 a 10 possui uma única alternativa como resposta.

1. Ronaldo gosta de correr na esteira. Ele nunca corre em dias de fim de semana, nunca corre em dois dias seguidos e nunca fica quatro dias seguidos sem correr. Qual das seguintes afirmações é correta sobre os dias de corrida de Ronaldo?

(A) Ronaldo corre toda quinta-feira.

(B) Ronaldo corre toda segunda-feira e toda sexta-feira.

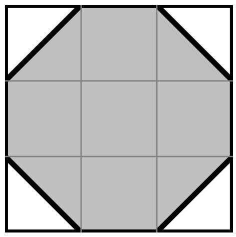
(C) Se Ronaldo correu numa quinta-feira, então ele necessariamente correu em 3 dias daquela semana.

(D) Se Ronaldo correu numa quarta-feira, então ele necessariamente correu em 3 dias daquela semana.

(E) Se Ronaldo não correu numa terça-feira, então ele necessariamente correu na quarta-feira daquela semana.

---

2. Para desenhar um octógono, Maria pegou um pedaço branco de papel em formato de quadrado de lado 3 e traçou com um lápis retas horizontais e verticais. Ela formou, assim, 9 quadradinhos de lado 1 e traçou as diagonais dos 4 quadradinhos das pontas, como na figura a seguir. Em seguida ela pintou o octógono de cinza.



Qual é a razão entre a área cinza e a área branca da figura?

(A) $\frac{7}{2}$ (B) 3 (C) $\frac{7}{4}$ (D) $\frac{5}{2}$ (E) 2

---

3. A fração $\frac{37}{60}$ pode ser escrita como uma soma de frações de numerador unitário. Por exemplo, $\frac{37}{60} = \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{180}$. É possível escrever $\frac{37}{60}$ como a soma de três frações de numerador unitário cujos denominadores são números inteiros consecutivos maiores do que 1. Qual é a soma desses denominadores?

(A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 18 (E) 21

---

4. Dentro de cada uma de duas caixas há uma bola vermelha ou uma bola verde. Na primeira caixa, do lado de fora, há um aviso: *"Dentro de pelo menos uma das duas caixas há uma bola verde"* e na segunda caixa há o aviso: *"Há uma bola vermelha dentro da outra caixa"*. Sabe-se que os dois avisos são ambos falsos ou ambos são verdadeiros. O que pode ser afirmado com certeza?

(A) A bola dentro da primeira caixa é vermelha e na segunda caixa é verde.

(B) A bola dentro da primeira caixa é verde e na segunda caixa é vermelha.

(C) Nas duas caixas a bola é vermelha.

(D) Nas duas caixas a bola é verde.

(E) Não é possível ter certeza de que cor é a bola em cada caixa.

---

5. Janaína colocou algumas moedas sobre uma mesa formando um triângulo (figura 1). Seu irmão moveu algumas moedas e formou outro triângulo (figura 2). Pelo menos quantas moedas ele moveu?

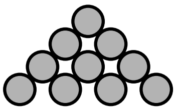


figura 1

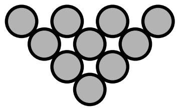


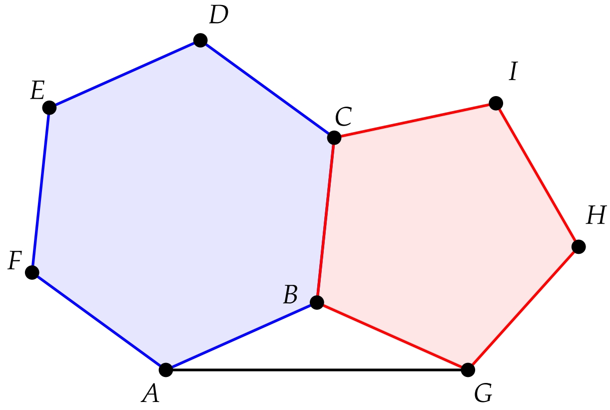
figura 2

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

---

6. A figura a seguir mostra um hexágono regular $ABCDEF$ e um pentágono regular $BCIHG$. Determine a medida em graus do ângulo $\angle BAG$.

Você pode querer utilizar que cada ângulo interno do polígono regular de n lados tem medida $\dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$.



(A) 30° (B) 27° (C) 24° (D) 20° (E) 18°

---

7. Pedro quer comprar uma figura de ação do famoso arqueólogo Roraima Jonas. Ele acompanha o preço durante 4 meses. No mês de janeiro a figura custava 200 reais. No mês de fevereiro o preço aumentou 10%, mas Pedro podia comprar com um desconto de 5% no valor. No mês de março o preço voltou a ser o mesmo de janeiro. Finalmente, em abril o preço subiu 5%, mas Pedro tinha 10% de desconto e comprou sua figura de ação. Qual é a diferença entre o preço que Pedro pagaria em fevereiro e o preço que Pedro pagou em abril?

(A) 9 reais (B) 11 reais (C) 12 reais (D) 15 reais (E) 20 reais

---

8. A calculadora de Juliana usa frações e tem uma tecla $\boxed{M}$. Cada fração é apresentada na forma irredutível e cada inteiro n é representado como $\frac{n}{1}$. Por exemplo, 3 aparece como $\frac{3}{1}$. Se a fração $\frac{p}{q}$ está no visor e Juliana aperta a tecla $\boxed{M}$, então a calculadora mostra no visor a fração $\dfrac{2p-q}{q}$ na sua forma irredutível. Por exemplo, se $\frac{5}{8}$ está no visor e Juliana aperta $\boxed{M}$, como $\dfrac{2\cdot 5-8}{8} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$, a calculadora mostra $\frac{1}{4}$ no visor.

Juliana apertou 9 vezes a tecla $\boxed{M}$ partindo de certa fração irredutível $\frac{N}{D}$ e obteve o número 0 (aparece a fração $\frac{0}{1}$). Quanto é $N+D$?

(A) 1024 (B) 1023 (C) 512 (D) 511 (E) 255

---

9. Uma data é *especial* quando ocorre no dia k do mês k e cai no k-ésimo dia da semana (em que o primeiro dia da semana é domingo) para algum k, $1 \le k \le 7$. Por exemplo, 5 de maio de 2022 é especial, pois caiu na quinta-feira (nesse exemplo, $k = 5$). Qual é a maior quantidade de dias especiais que pode ocorrer em um ano?

Dados: Janeiro, Março e Maio têm 31 dias; Fevereiro tem 28 ou 29 dias; Abril e Junho têm 30 dias.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

---

10. Qual é a soma dos primeiros 2022 dígitos após a vírgula na representação decimal da fração $\dfrac{2021}{148}$?

(A) 6066 (B) 6068 (C) 6073 (D) 9101 (E) 9110

Respostas numéricas

Importante: para cada problema de 11 a 15 você deve indicar um número inteiro entre 0000 e 9999 como resposta.

11. Um número inteiro positivo é dito *aumentante* se cada algarismo, a partir do segundo da esquerda, é maior que o algarismo imediatamente à esquerda. Por exemplo, 137 e 1479 são aumentantes, mas 44 e 890 não são. Existem quantos números aumentantes com 8 algarismos?

Resposta do problema 11:

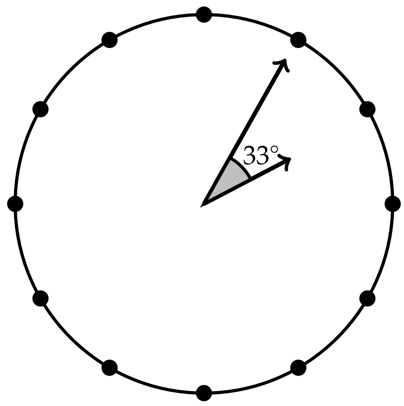
---

12. Ainda usando a definição de número aumentante do problema anterior, existem quantos números aumentantes, de qualquer quantidade de algarismos, divisíveis por 15?

Resposta do problema 12:

---

13. Maria observou que os ponteiros de um relógio analógico formavam um ângulo de 33° (sim, Maria mediu), como mostra a figura a seguir. Após algum tempo, menor do que uma hora, o ponteiro dos minutos (ponteiro maior) passou pelo ponteiro das horas (ponteiro menor) e formou novamente um ângulo de 33°. Quantos minutos se passaram?



Resposta do problema 13:

---

14. A calculadora do professor Piraldo tem só um botão. Ao apertá-lo, ele subtrai do número N no visor o seu maior divisor diferente de N. Por exemplo, se no visor aparece 75, o botão faz aparecer o número $75 - 25 = 50$.

Suponha que a calculadora exiba o número 5^{2022} (a calculadora é bem grande!). Quantas vezes o botão deve ser apertado até que apareça 1 no visor pela primeira vez?

Resposta do problema 14:

---

15. As 9 casinhas de um tabuleiro 3×3 devem ser preenchidas com os números de 1 a 9, com um número em cada casinha. Um preenchimento é *sinuoso* quando todos os pares de números consecutivos ocupam casas vizinhas (com um lado em comum). O tabuleiro a seguir, por exemplo, é sinuoso:

1	2	9
4	3	8
5	6	7

Quantos são os tabuleiros sinuosos?

Resposta do problema 15:

1ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 1 (6º ou 7º ano do Ensino Fundamental)

Nome: ______________________________

Escola: ______________________________

Ano: (   ) 6º   (   ) 7º

Testes

1.	A	B	C	D	E
2.	A	B	C	D	E
3.	A	B	C	D	E
4.	A	B	C	D	E
5.	A	B	C	D	E
6.	A	B	C	D	E
7.	A	B	C	D	E
8.	A	B	C	D	E
9.	A	B	C	D	E
10.	A	B	C	D	E

Respostas numéricas

11.				
12.				
13.				
14.				
15.				

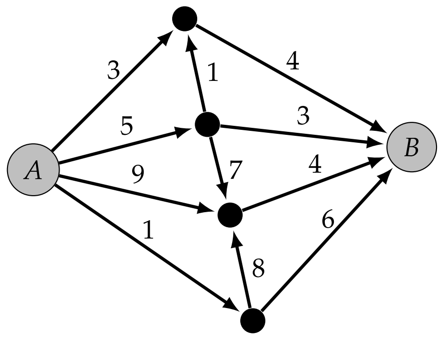
1ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 2 (8º ou 9º ano do Ensino Fundamental)

Testes

Importante: cada problema de 1 a 10 possui uma única alternativa como resposta.

1. Sônico, o tatu bola veloz, está caminhando pelas estradas do planeta Mobius coletando anéis. Abaixo está um mapa com a quantidade de anéis em cada estrada do reino:



Sabendo que Sônico partiu da cidade A até a cidade B, a diferença entre a maior e a menor quantidade de anéis que ele pode ter coletado é:

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

---

2. Dentro de cada uma de duas caixas há uma bola vermelha ou uma bola verde. Na primeira caixa, do lado de fora, há um aviso: *"Dentro de pelo menos uma das duas caixas há uma bola verde"* e na segunda caixa há o aviso: *"Há uma bola vermelha dentro da outra caixa"*. Sabe-se que os dois avisos são ambos falsos ou ambos são verdadeiros. O que pode ser afirmado com certeza?

(A) A bola dentro da primeira caixa é vermelha e na segunda caixa é verde.

(B) A bola dentro da primeira caixa é verde e na segunda caixa é vermelha.

(C) Nas duas caixas a bola é vermelha.

(D) Nas duas caixas a bola é verde.

(E) Não é possível ter certeza de que cor é a bola em cada caixa.

---

3. Qual é a soma dos primeiros 2022 dígitos após a vírgula na representação decimal da fração $\frac{2021}{148}$?

(A) 6066 (B) 6068 (C) 6073 (D) 9101 (E) 9110

---

4. Uma data é *especial* quando ocorre no dia k do mês k e cai no k-ésimo dia da semana (em que o primeiro dia da semana é domingo) para algum k, $1 \leq k \leq 7$. Por exemplo, 5 de maio de 2022 é especial, pois caiu na quinta-feira (nesse exemplo, $k = 5$). Qual é a maior quantidade de dias especiais que pode ocorrer em um ano?

Dados: Janeiro, Março e Maio têm 31 dias; Fevereiro tem 28 ou 29 dias; Abril e Junho têm 30 dias.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

---

5. A soma dos algarismos do número

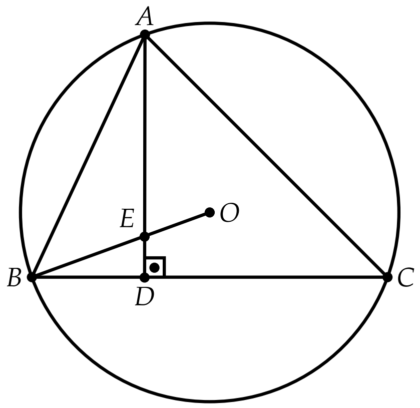
$$20222022^2 + 20222021^2 - 2 \times 20222020 \times 20222019$$

é igual a

(A) 32 (B) 35 (C) 38 (D) 40 (E) 42

---

6. Na figura, AD é altura e O é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Sabendo que $\angle BAC = 72°$, qual é a medida do ângulo $\angle AEB$?



(A) 96° (B) 108° (C) 120° (D) 132° (E) 144°

---

7. Um número inteiro positivo n é tal que:

- n possui exatamente 15 divisores positivos;
- n não é múltiplo de 5.

Qual é a diferença entre o quarto e o terceiro menores valores possíveis de n?

(A) 768 (B) 832 (C) 1152 (D) 1920 (E) 2033

---

8. No triângulo ABC, retângulo em A, temos $AB = 6$ e $AC = 8$. Seja D o pé da altura relativa ao lado BC e M o ponto médio de BC. O valor de DM é

(A) $\frac{9}{7}$ (B) $\frac{7}{5}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{5}{3}$ (E) $\frac{9}{5}$

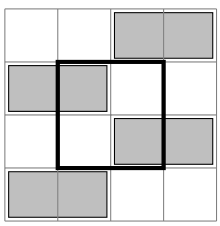
---

9. As raízes da equação $x^2 - nx + m = 0$ são os números reais não nulos a e b. As raízes da equação $x^2 - 2nx + 2m = 0$ são a^2 e b^2. O valor de $m + n$ é

(A) $1 - \sqrt{5}$ (B) $3 - \sqrt{5}$ (C) $1 + \sqrt{5}$ (D) $2 + \sqrt{5}$ (E) $3 + \sqrt{5}$

---

10. De quantas maneiras podemos cobrir algumas casas de um tabuleiro 10×10 com dominós 2×1 ou 1×2 de tal forma que, dadas quaisquer quatro casas do tabuleiro que compartilham um vértice, exatamente duas delas estão cobertas por dominós? A seguir exibimos parte de um tabuleiro válido, em que os retângulos cinzas representam os dominós.

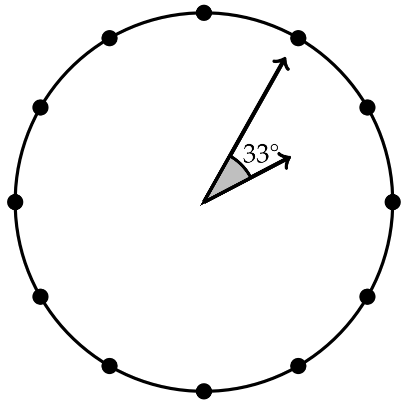


(A) 64 (B) 96 (C) 128 (D) 150 (E) 256

Respostas numéricas

Importante: para cada problema de 11 a 15 você deve indicar um número inteiro entre 0000 e 9999 como resposta.

11. Maria observou que os ponteiros de um relógio analógico formavam um ângulo de 33° (sim, Maria mediu), como mostra a figura a seguir. Após algum tempo, menor do que uma hora, o ponteiro dos minutos (ponteiro maior) passou pelo ponteiro das horas (ponteiro menor) e formou novamente um ângulo de 33°. Quantos minutos se passaram?



Resposta do problema 11:

---

12. A calculadora do professor Piraldo tem só um botão. Ao apertá-lo, ele subtrai do número N no visor o seu maior divisor diferente de N. Por exemplo, se no visor aparece 75, o botão faz aparecer o número $75 - 25 = 50$.

Suponha que a calculadora exiba o número 5^{2022} (a calculadora é bem grande!). Quantas vezes o botão deve ser apertado até que apareça 1 no visor pela primeira vez?

Resposta do problema 12:

---

13. As 9 casinhas de um tabuleiro 3×3 devem ser preenchidas com os números de 1 a 9, com um número em cada casinha. Um preenchimento é *sinuoso* quando todos os pares de números consecutivos ocupam casas vizinhas (com um lado em comum). O tabuleiro a seguir, por exemplo, é sinuoso:

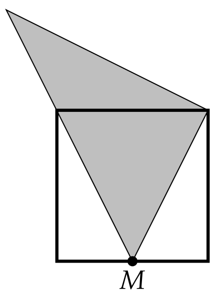
1	2	9
4	3	8
5	6	7

Quantos são os tabuleiros sinuosos?

Resposta do problema 13:

---

14. Na figura, M é ponto médio do lado de um quadrado de área 36. Qual é a área do triângulo retângulo cinza?



Resposta do problema 14:

15. Para cada x real denotamos $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro menor que ou igual a x. Por exemplo, $\lfloor 3{,}15 \rfloor = 3$. Sabendo que

$$\left\lfloor \sqrt{1} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor = 217,$$

qual é o valor de n?

Resposta do problema 15:

1ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 2 (8º ou 9º ano do Ensino Fundamental)

Nome: ______________________________

Escola: ______________________________

Ano: (   ) 8º   (   ) 9º

Testes

1.	A	B	C	D	E
2.	A	B	C	D	E
3.	A	B	C	D	E
4.	A	B	C	D	E
5.	A	B	C	D	E
6.	A	B	C	D	E
7.	A	B	C	D	E
8.	A	B	C	D	E
9.	A	B	C	D	E
10.	A	B	C	D	E

Respostas numéricas

11.				
12.				
13.				
14.				
15.				

1ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 3 (Ensino Médio)

Testes

Importante: cada problema de 1 a 10 possui uma única alternativa como resposta.

1. Ronaldo gosta de correr na esteira. Ele nunca corre em dias de fim de semana, nunca corre em dois dias seguidos e nunca fica quatro dias seguidos sem correr. Qual das seguintes afirmações é correta sobre os dias de corrida de Ronaldo?

(A) Ronaldo corre toda quinta-feira.

(B) Ronaldo corre toda segunda-feira e toda sexta-feira.

(C) Se Ronaldo correu numa quinta-feira, então ele necessariamente correu em 3 dias daquela semana.

(D) Se Ronaldo correu numa quarta-feira, então ele necessariamente correu em 3 dias daquela semana.

(E) Se Ronaldo não correu numa terça-feira, então ele necessariamente correu na quarta-feira daquela semana.

---

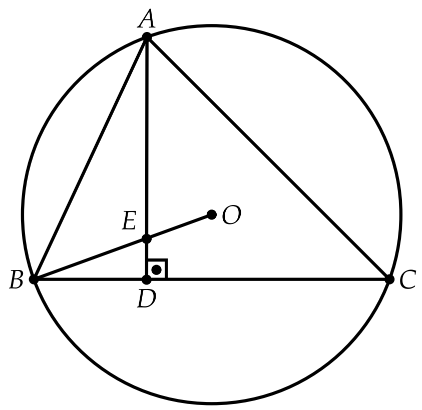
2. Uma data é *especial* quando ocorre no dia k do mês k e cai no k-ésimo dia da semana (em que o primeiro dia da semana é domingo) para algum k, $1 \leq k \leq 7$. Por exemplo, 5 de maio de 2022 é especial, pois caiu na quinta-feira (nesse exemplo, $k = 5$). Qual é a maior quantidade de dias especiais que pode ocorrer em um ano?

Dados: Janeiro, Março e Maio têm 31 dias; Fevereiro tem 28 ou 29 dias; Abril e Junho têm 30 dias.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

---

3. Na figura, AD é altura e O é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Sabendo que $\angle BAC = 72°$, qual é a medida do ângulo $\angle AEB$?



(A) 96° (B) 108° (C) 120° (D) 132° (E) 144°

---

4. Seja $f(x) = 2x - 1$. A raiz de $f(f(\ldots f(x)\ldots)) = 0$, em que f é aplicada 2022 vezes, é

(A) $1 - \dfrac{1}{2^{2022}}$ (B) $2^{2022} - 1$ (C) $\dfrac{1}{2022}$ (D) $2022^2 - 1$ (E) $1 - \dfrac{1}{2022^2}$

---

5. Uma formiga está em um dos vértices de um emaranhado de arame em forma de cubo. Os arames formam as arestas dos 27 cubos unitários que formam um cubo maior de aresta 3. No vértice oposto está açúcar, e a formiga vai em direção do açúcar usando os arames como caminho. Quantos caminhos a formiga pode usar para chegar ao açúcar, andando o mínimo possível?

(A) 720 (B) 1440 (C) 1680 (D) 2440 (E) 2880

---

6. As raízes da equação $x^2 - nx + m = 0$ são os números reais não nulos a e b. As raízes da equação $x^2 - 2nx + 2m = 0$ são a^2 e b^2. O valor de $m + n$ é

(A) $1 - \sqrt{5}$ (B) $3 - \sqrt{5}$ (C) $1 + \sqrt{5}$ (D) $2 + \sqrt{5}$ (E) $3 + \sqrt{5}$

7. Seja O o centro de um cubo. Ligamos O a todos os pares de pontos médios de arestas distintas do cubo, formando ângulos de vértice O. Quantas medidas diferentes de ângulos, incluindo o ângulo de $180°$, são obtidas?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

---

8. Um triângulo é *manhoso* quando cada um de seus lados tem medida da forma $\sqrt{n}$, n inteiro positivo, e sua área é racional. Por exemplo, o triângulo de lados $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{9} = 3$ é manhoso, pois sua área é $\frac{3}{2}$. Um triângulo de lados $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ e $\sqrt{c}$, com $a < b < c$, é manhoso. O menor valor possível de $a + b + c$ é

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

---

9. Um conjunto S de números inteiros positivos é *espetacular* quando, para quaisquer $a, b, c \in S$ distintos dois a dois, $a + b + c$ **não** é múltiplo de 5. A maior quantidade de elementos em um conjunto espetacular que está contido em $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ é

(A) 4 (B) 5 (C) 7 (D) 8 (E) 10

---

10. No interior do triângulo ABC, retângulo em A, existe um ponto P tal que

$$\angle PAC = \angle PCB = \angle PBC = 15°.$$

Então $\frac{AC}{AB}$ é igual a

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $\sqrt{6}$ (E) 3

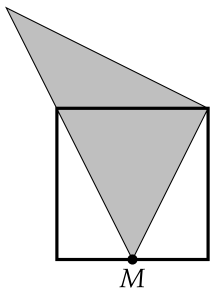
Respostas numéricas

Importante: para cada problema de 11 a 15 você deve indicar um número inteiro entre 0000 e 9999 como resposta.

11. Quantos pares ordenados de inteiros (x, y), não necessariamente positivos, satisfazem a equação $y - \frac{y}{x} = 2022$?

Resposta do problema 11: | | | |

12. Na figura, M é ponto médio do lado de um quadrado de área 36. Qual é a área do triângulo retângulo cinza?



Resposta do problema 12: | | | |

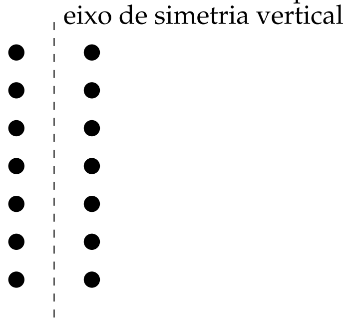
13. O polinômio $P(x)$ tem coeficientes inteiros e é tal que $P(0) = 1$ e $P(3) = 100$. Qual é o menor valor possível de $|P(10)|$?

Resposta do problema 13: | | | |

14. Jacob e Elon brincam com uma pilha de 2^n chocolates onde n é um inteiro positivo maior que 10. Inicialmente, Elon fica com 2022 desses chocolates e deixa os restantes para Jacob. Em seguida, cada um realiza o seguinte procedimento: se o número de chocolates em sua pilha for ímpar, ele pega um chocolate e guarda no seu bolso. Se o número for par, ele retira metade dos chocolates da pilha. Os chocolates retirados não são colocados no bolso e não são mais utilizados na brincadeira. Cada um repete o procedimento em sua pilha até ela acabar. Qual é o maior valor de n para o qual, ao final da brincadeira, Elon terá mais chocolates no bolso que Jacob?

Resposta do problema 14: | | | |

15. A figura a seguir apresenta 14 pontos separados em duas colunas verticais com 7 pontos em cada coluna. Esmeralda desenha sete segmentos de reta entre dois pontos na figura, de modo que cada segmento tenha uma extremidade em cada coluna. Cada ponto é extremidade de exatamente um dos sete segmentos. Dizemos que um dos desenhos de Esmeralda é *espelhado* se é simétrico em relação ao eixo de simetria vertical destacado entre as duas colunas. Quantos desenhos espelhados diferentes Esmeralda pode fazer?



Resposta do problema 15: | | | |

1ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 3 (Ensino Médio)

Nome: ____

Escola: ____

Ano: (   ) 1º   (   ) 2º   (   ) 3º

Testes

1.	A	B	C	D	E
2.	A	B	C	D	E
3.	A	B	C	D	E
4.	A	B	C	D	E
5.	A	B	C	D	E
6.	A	B	C	D	E
7.	A	B	C	D	E
8.	A	B	C	D	E
9.	A	B	C	D	E
10.	A	B	C	D	E

Respostas numéricas

11.				
12.				
13.				
14.				
15.				