1ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 1 (6º ou 7º ano do Ensino Fundamental)

Respostas

Testes

1. D	2. A	3. C	4. A	5. B
6. C	7. E	8. B	9. C	10. C

Respostas Numéricas

Problema	11	12	13	14	15
Resposta	0009	0006	0012	6066	0040

Nível 2 (8º ou 9º ano do Ensino Fundamental)

Respostas

Testes

1. D	2. A	3. C	4. C	5. D
6. B	7. C	8. B	9. E	10. A

Respostas Numéricas

Problema	11	12	13	14	15
Resposta	0012	6066	0040	0030	0050

Nível 3 (Ensino Médio)

Respostas

Testes

1. D	2. C	3. B	4. A	5. C
6. E	7. C	8. C	9. D	10. C

Respostas Numéricas

Problema	11	12	13	14	15
Resposta	0015	0030	0019	0015	0232

1ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 1 (6º ou 7º ano do Ensino Fundamental)

Respostas

Testes

1. D	2. A	3. C	4. A	5. B
6. C	7. E	8. B	9. C	10. C

Respostas Numéricas

Problema	11	12	13	14	15
Resposta	0009	0006	0012	6066	0040

Soluções – Testes

1. *Alternativa D*

No período de quatro dias que consiste na quinta-feira, sexta-feira, sábado e domingo, Ronaldo deve correr. Como não corre no sábado e nem no domingo, corre na quinta-feira ou na sexta-feira. O mesmo argumento utilizado no período que consiste em sábado, domingo, segunda-feira e terça-feira mostra que Ronaldo corre na segunda-feira ou na terça-feira.

Assim, se Ronaldo corre na quarta-feira, ele corre três dias naquela semana: além da quarta-feira, uma vez na segunda-feira ou terça-feira e uma vez na quinta-feira ou sexta-feira.

Para notar que as outras alternativas estão erradas, Ronaldo pode correr toda terça-feira e sexta-feira (o que elimina as alternativas A e B) ou toda segunda-feira e quinta-feira (o que elimina as alternativas C e E).

---

2. *Alternativa A*

A área cinza corresponde a cinco quadrados inteiros e quatro metades de quadrados, ou seja, $5 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 7$ quadrados; a área branca corresponde a quatro metades de quadrados, ou seja, $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ quadrados. A razão pedida é $\frac{7}{2}$.

---

3. *Alternativa C*

Como $\frac{37}{60} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$, a soma pedida é $4 + 5 + 6 = 15$.

Observação: Uma maneira de achar os denominadores é notar que o denominador da soma é 60, que tem fatores primos 2, 3 e 5. Então dois chutes razoáveis são 3, 4 e 5, ou 4, 5 e 6.

---

4. *Alternativa A*

Se ambos os avisos são falsos, não é verdade que "dentro de pelo menos uma das duas caixas há uma bola verde". Ou seja, as duas caixas têm uma bola vermelha. Mas isso faz com que o aviso da outra caixa, "há uma bola vermelha dentro da outra caixa", seja verdadeiro. Absurdo.

Logo ambos os avisos são verdadeiros, de modo que a caixa com o aviso "há uma bola vermelha dentro da outra caixa" indica que a primeira caixa tem uma bola vermelha e o aviso "dentro de pelo menos uma das duas caixas há uma bola verde" indica que a segunda caixa tem uma bola verde.

---

5. *Alternativa B*

A seguir, destacamos uma maneira de deslocar três moedas. Elas estão pintadas de vermelho nas duas figuras.

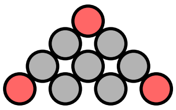


figura 1

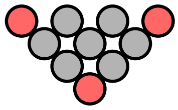


figura 2

Para notar que não é possível obter a figura movendo duas ou menos moedas da figura 1, considere o que a fileira inferior da figura 1 vira na figura 2.

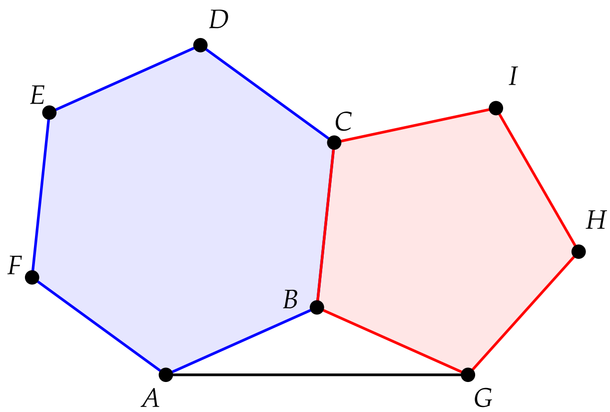
- Se parte dela vira uma das duas fileiras superiores da figura 2, devemos formar duas fileiras novas abaixo dessa fileira, o que envolve mover pelo menos $1 + 2 = 3$ moedas.
- Se ela vira a segunda fileira de baixo para cima, devemos remover duas de suas moedas e obter a moeda de baixo, ou seja, movemos pelo menos $2 + 1 = 3$ moedas.
- Se ela vira a fileira inferior, devemos remover pelo menos três de suas moedas.

---

6. *Alternativa C*

Os dois polígonos regulares têm o lado comum BC, logo $AB = BC = BG$, o que indica que o triângulo ABG é isósceles. Além disso,

$$\angle ABG = 360° - \angle ABC - \angle CBG = 360° - \frac{4 \cdot 180°}{6} - \frac{3 \cdot 180°}{5} = 360° - 120° - 108° = 132°.$$



Assim,

$$\angle BAG = \frac{180° - \angle ABG}{2} = 90° - \frac{1}{2} \cdot 132° = 24°.$$

---

7. *Alternativa E*

O preço que Pedro pagaria em fevereiro é $200 \cdot (1 + 0{,}10) \cdot (1 - 0{,}05)$ e o preço que pagaria em abril é $200 \cdot (1 + 0{,}05) \cdot (1 - 0{,}10)$. A diferença é

$$\begin{aligned} & 200 \cdot (1 + 0{,}10) \cdot (1 - 0{,}05) - 200 \cdot (1 + 0{,}05) \cdot (1 - 0{,}10) \\ = {} & 200 \cdot (1 + 0{,}10 - 0{,}05 - 0{,}10 \cdot 0{,}05 - 1 + 0{,}10 - 0{,}05 + 0{,}05 \cdot 0{,}10) \\ = {} & 200 \cdot 0{,}10 = 20 \text{ reais}. \end{aligned}$$

---

8. *Alternativa B*

Ao apertar o botão $\boxed{M}$, o número $x = \frac{p}{q}$ é transformado em $\frac{2p-q}{q} = 2 \cdot \frac{p}{q} - 1 = 2x - 1$. Assim, como $y = 2x - 1 \iff x = \frac{y+1}{2}$, se "voltarmos no tempo", ao "desapertamos" a tecla $\boxed{M}$ voltamos de y para $\frac{y+1}{2}$. Com isso, ao "desapertar" $\boxed{M}$ nove vezes obtemos

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \leftarrow \frac{1 + 1/2}{2} = \frac{3}{4} \leftarrow \frac{1 + 3/4}{2} = \frac{7}{8} \leftarrow \frac{1 + 7/8}{2} = \frac{15}{16} \leftarrow \frac{1 + 15/16}{2} = \frac{31}{32} \leftarrow \frac{1 + 31/32}{2} = \frac{63}{64} \\ \leftarrow \frac{1 + 63/64}{2} = \frac{127}{128} \leftarrow \frac{1 + 127/128}{2} = \frac{255}{256} \leftarrow \frac{1 + 255/256}{2} = \frac{511}{512}, \end{aligned}$$

cuja soma $N + D$ é $511 + 512 = 1023$.

---

9. *Alternativa C*

Considere o dia 3 de março.

- Até o dia 4 de abril passam $31 + 1 = 32 = 7 \cdot 4 + 4$ dias, que são 4 semanas e 4 dias.
- Até o dia 5 de maio passam $32 + 30 + 1 = 63 = 7 \cdot 9$ dias, que são 9 semanas.
- Até o dia 6 de junho passam $63 + 31 + 1 = 95 = 13 \cdot 7 + 4$ dias, que são 13 semanas e 4 dias.

- Até o dia 7 de julho passam $95 + 30 + 1 = 126 = 18 \cdot 7$ dias, que são 18 semanas.

Isso quer dizer que 3 de março, 5 de maio e 7 de julho caem no mesmo dia da semana, ou seja, no máximo um desses dias é especial. O mesmo vale para 4 de abril e 6 de junho. A diferença entre esses dois conjuntos de datas é três dias da semana a mais entre o primeiro conjunto e o segundo conjunto. Com isso, a única possibilidade de que dois dos cinco dias anteriores sejam especiais é 4 de abril e 7 de junho. Em todos os outros casos, no máximo uma data dessas cinco é especial e temos no máximo três datas especiais.

Voltando ao caso anterior, 4 de abril é uma quarta-feira e 7 de julho é um sábado. Voltando, temos que 3 de março é sábado (quatro dias da semana antes de 4 de abril).

Agora, voltando para 2 de fevereiro e 1º de janeiro, temos

- Voltando para 2 de fevereiro, retornamos $28 + 1 = 29 = 4 \cdot 7 + 1$ ou $29 + 1 = 30 = 4 \cdot 7 + 2$ dias, ou seja, 4 semanas e 1 ou 2 dias. Esse dia é quinta-feira (ano bissexto) ou sexta-feira (ano não bissexto).
- Voltando para 1º de janeiro, retornamos mais $31 + 1 = 32$ dias, ou seja, 4 semanas e 4 dias. Esse dia é domingo (ano bissexto) ou segunda-feira (ano não bissexto). Nos anos bissextos, esse dia é especial.

Com isso, no máximo 3 dias são especiais: 1/1, 4/4 e 7/7 em um ano bissexto. O próximo ano em que isso vai acontecer será 2040.

---

10. *Alternativa C*

$$\frac{2021}{148} = \frac{2021}{4 \cdot 37} = 13 + \frac{97}{148} = 13 + \frac{1}{4} + \frac{15}{37} = 13 + 0{,}25 + \frac{405}{999} = 13{,}25 + 0{,}405405405\ldots = 13{,}65540540\ldots = 13{,}65\overline{540}.$$

Logo, como $2022 = 3 \cdot 674$, os 2022 primeiros dígitos após a vírgula são 6, 5, 673 períodos $\overline{540}$ e 5, e a soma pedida é $6 + 5 + 673 \cdot (5 + 4 + 0) + 5 = 6073$.

Soluções – Respostas numéricas

11. *Resposta:* 0009

Como nenhum número inteiro começa com zero, nenhum número aumentante tem zero, e cada algarismo aparece no máximo uma vez. Com isso, há nove algarismos possíveis e devemos escolher oito. Basta excluir um dos nove algarismos e colocar os demais em ordem crescente. Portanto há 9 números aumentantes com oito algarismos.

---

12. *Resposta:* 0006

Um número é múltiplo de 15 quando termina com 0 ou 5 e sua soma de algarismos é múltiplo de 3. Vimos que números aumentantes não têm zero, logo o algarismo das unidades é 5. Isso quer dizer que todos seus dígitos à esquerda são menores do que 5, e temos no máximo cinco algarismos. Podemos então listar as possibilidades.

- Cinco algarismos: a única possibilidade é 12345, que é múltiplo de 15.
- Quatro algarismos: como a soma dos cinco números de 1 a 5 é 15, devemos excluir um múltiplo de 3. A única possibilidade é excluir 3, obtendo 1245.
- Três algarismos: a soma dos dois números excluídos é múltiplo de 3, e não podemos excluir o 5 das unidades. Podemos excluir 1 e 2, ou 2 e 4, obtendo 345 ou 135.
- Dois algarismos: é mais fácil escolher quem vai com o 5 nas unidades, e vemos que só é possível termos 15 ou 45.
- Um algarismo: 5 não é múltiplo de 15.

Assim, há 6 números possíveis: 12345, 1245, 345, 135, 15 e 45.

---

13. *Resposta:* 0012

Em uma hora, ou seja, 60 minutos, o ponteiro maior dá uma volta completa (360°) e o ponteiro menor anda $\frac{1}{12} \cdot 360° = 30°$. Assim ao se passar um minuto, o ponteiro maior anda $\frac{360°}{60} = 6°$ e o ponteiro menor anda $\frac{30°}{60} = 0{,}5°$, de modo que o ponteiro maior anda $6° - 0{,}5° = 5{,}5°$ a mais.

Para se formar novamente um ângulo de 33°, o ponteiro maior precisa ultrapassar o menor e andar ainda 33° a mais, ou seja, deve superar o ponteiro menor em $33° + 33° = 66°$. Como o ponteiro maior ganha 5,5° por minuto, passa-se $\frac{66°}{5{,}5°} = 12$ minutos.

14. *Resposta:* 6066

O maior divisor de 5^k é 5^{k-1} e o maior divisor de um número par é sua metade. Assim, tendo 5^k na tela, ao apertar o botão três vezes obtemos $5^k - 5^{k-1} = 4 \cdot 5^{k-1}$, $4 \cdot 5^{k-1} - 2 \cdot 5^{k-1} = 2 \cdot 5^{k-1}$ e $2 \cdot 5^{k-1} - 5^{k-1} = 5^{k-1}$, ou seja, para diminuir o expoente da potência de 5 em uma unidade precisamos apertar o botão três vezes. Portanto, para diminuir o expoente de 2022 para 0 (já que $1 = 5^0$), precisamos apertar o botão $3 \cdot 2022 = 6066$ vezes.

15. *Resposta:* 0040

Casas vizinhas têm cores diferentes. Com isso, como temos cinco ímpares e quatro pares, e cinco casas cinzas e quatro brancas, os ímpares precisam ir em casas cinzas e os pares em casas brancas.

O número 1 pode ir na casa do centro ou uma das quatro casas do canto. Se for no centro, há 4 escolhas para se colocar o número 2 (qualquer um dos quatro vizinhos) e 2 escolhas para o número 3 (qualquer um dos dois vizinhos que sobram). Essa escolha também dita se os números ficam no sentido horário ou anti-horário, e não há mais escolhas para se fazer. Assim, nesse caso há $4 \cdot 2 = 8$ possibilidades.

Se 1 for em um dos quatro cantos, há 4 escolhas para o canto e 2 escolhas para onde colocar o 2. Feito isso, há quatro possibilidades para preencher o tabuleiro:

1	2	9
4	3	8
5	6	7

1	2	3
6	5	4
7	8	9

1	2	3
8	9	4
7	6	5

1	2	3
8	7	4
9	6	5

Assim, nesse caso há $4 \cdot 2 \cdot 4 = 32$ possibilidades, e o total de tabuleiros sinuosos é $8 + 32 = 40$.

1ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 2 (8º ou 9º ano do Ensino Fundamental)

Respostas

Testes

1. D	2. A	3. C	4. C	5. D
6. B	7. C	8. B	9. E	10. A

Respostas Numéricas

Problema	11	12	13	14	15
Resposta	0012	6066	0040	0030	0050

Soluções – Testes

1. *Alternativa D*

Numerando os nós intermediários de I a IV, as quantidades de anéis nos possíveis caminhos do nosso carismático tatu bola são:

- A-I-B: $3 + 4 = 7$
- A-II-I-B: $5 + 1 + 4 = 10$
- A-II-B: $5 + 3 = 8$
- A-II-III-B: $5 + 4 + 7 = 16$
- A-III-B: $9 + 4 = 13$
- A-IV-III-B: $1 + 8 + 4 = 13$
- A-IV-B: $1 + 6 = 7$

A diferença entre o maior e o menor valor é $16 - 7 = 9$.

---

2. *Alternativa A*

Ver solução do problema 4 do nível 1.

---

3. *Alternativa C*

Ver solução do problema 10 do nível 1.

---

4. *Alternativa C*

Ver solução do problema 9 do nível 1.

---

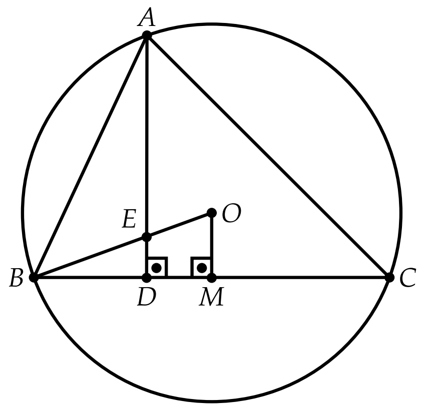
5. *Alternativa D*

Seja $x = 20222020$. Então

$$\begin{aligned} 20222022^2 + 20222021^2 - 2 \times 20222020 \times 20222019 &= (x+2)^2 + (x+1)^2 - 2x(x-1) \\ &= x^2 + 4x + 4 + x^2 + 2x + 1 - 2x^2 + 2x \\ &= 8x + 5 = 8 \cdot 20222020 + 5 = 161776165, \end{aligned}$$

cuja soma dos algarismos é $1 + 6 + 1 + 7 + 7 + 6 + 1 + 6 + 5 = 40$.

6. *Alternativa B*



Seja M o ponto médio de BC. Temos $OM \perp BC$, de modo que $OM \parallel DE$ e

$$\angle BED = \angle BOM = \frac{1}{2} \cdot \angle BOC = \frac{1}{2} \cdot 2\angle BAC = \angle BAC = 72°.$$

Logo $\angle AEB = 180° - \angle BED = 180° - 72° = 108°$.

7. *Alternativa C*

A quantidade de divisores positivos de $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ é $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$. Assim, como $15 = 3 \cdot 5 = (2 + 1)(3 + 1) = 14 + 1$, os números com 15 divisores são da forma p^2q^4 ou p^{14}, p, q primos distintos.

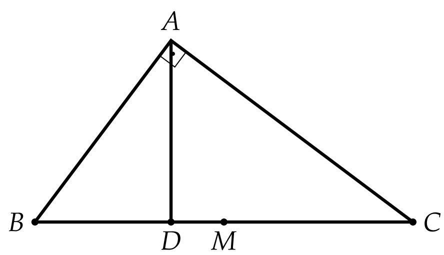
Temos $2^4 3^2 \le p^4 q^2$ para todos p, q primos distintos e $2^4 3^2 < 2^{14}$, pois $3^2 = 9 < 2^{10}$. Assim, o menor valor possível para n é $2^4 3^2$.

Agora, considere $2^4 7^2$ e $2^2 3^4$. Temos $2^4 7^2 - 2^2 3^4 = 2^2(2^2 7^2 - 3^4) = 4(4 \cdot 49 - 81) > 0$ e $2^4 7^2 < 2^4 \cdot 64 < 2^{14}$. Como $2^2 3^4 \le p^4 q^2$ para $p \ge 3$ e $2^2 4^3 < 2^4 7^2 \le 2^4 q^2$, o segundo menor valor possível para n é $2^2 3^4$ e o terceiro menor valor possível para n é $2^4 7^2$.

Os próximos números a serem considerados são $2^4 11^2$, $3^4 7^2$ e $2^2 7^4$. Temos $\frac{2^4 11^2}{3^4 7^2} = \frac{16 \cdot 121}{81 \cdot 49} < \frac{16 \cdot 3 \cdot 49}{80 \cdot 49} = \frac{3}{5} < 1$ e $\frac{2^4 11^2}{2^2 7^4} = \frac{2^2 \cdot 11^2}{7^4} = \frac{4 \cdot 121}{49^2} < 1$ e $2^4 11^2 < 2^4 \cdot 16^2 < 2^{14}$. Logo o quarto menor valor possível para n é $2^4 11^2$.

A diferença pedida é $2^4 11^2 - 2^4 7^2 = 2^4(11^2 - 7^2) = 2^4(11 - 7)(11 + 7) = 2^7 \cdot 9 = 9 \cdot 128 = 1152$.

8. *Alternativa B*



Pelo teorema de Pitágoras, $BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Assim, $BM = \frac{BC}{2} = 5$ e, pelas relações métricas no triângulo ABC, $BD \cdot BC = AB^2 \iff BD = \frac{6^2}{10} = \frac{18}{5}$. Logo $DM = BM - BD = 5 - \frac{18}{5} = \frac{7}{5}$.

9. *Alternativa E*

Por soma e produto, $ab = m$, $a + b = n$, $a^2b^2 = 2m$ e $a^2 + b^2 = 2n$. Assim, como $m = ab \neq 0$, $(ab)^2 = 2m = 2ab \iff m^2 = 2m \iff m = 2$ e, $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = n^2 - 2m = n^2 - 2 \cdot 2 = n^2 - 4$. Assim,

$$n^2 - 4 = 2n \iff n^2 - 2n - 4 = 0 \iff n = 1 \pm \sqrt{5}.$$

Agora, a e b são reais não nulos se $(a - b)^2 \ge 0 \iff (a + b)^2 \ge 4ab \iff n^2 \ge 4 \cdot 2 \iff |n| \ge 2\sqrt{2}$. Como $|1 - \sqrt{5}| < 2\sqrt{2} < 1 + \sqrt{5}$, $n = 1 + \sqrt{5}$. Verifica-se que $x^2 - (1 + \sqrt{5})x + 2 = 0$ tem soluções reais.

Com isso, $m + n = 2 + 1 + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5}$.

10. *Alternativa A*

Considere o quadrado 2×2 do canto superior esquerdo. Duas dessas casas precisam ser ocupadas por dominós. As possibilidades, usando ○ para dizer que a casa é ocupada por dominó e × para dizer que não é ocupada, são

×	○	
×	○	

×	×	
○	○	

○	×	
○	×	

○	○	
×	×	

×	○	
○	×	

○	×	
×	○	

A última possibilidade não é viável, pois um dominó ocupa duas casas e ambas as casas vizinhas à casa do canto não estão ocupadas. Ao continuar a quinta possibilidade, notamos que um quadrado 2×2 tem pelo menos três casas não ocupadas, o que não é possível:

×	○	○	
○	×	×	
○	×		

Deste modo, em todo caso, ocupamos duas das casas do quadrado do canto com um dominó. Se esse dominó está na vertical, as duas primeiras linhas estão definidas:

×	○	×	○	×	○	×	○	×	○
×	○	×	○	×	○	×	○	×	○

○	×	○	×	○	×	○	×	○	×
○	×	○	×	○	×	○	×	○	×

Se o dominó está na horizontal, preenchemos as duas primeiras colunas de modo análogo.

Assim, preenchemos linha por linha ou coluna por coluna, com duas possibilidades para cada novo par de linhas ou colunas (os dominós precisam ficar todos horizontais ou todos verticais).

Como há 4 maneiras de preencher o primeiro canto e 2 maneiras para preencher cada um dos próximos quatro pares de filas, há $4 \cdot 2^4 = 64$ possibilidades de preenchimento.

Soluções – Respostas numéricas

11. *Resposta:* 0012

Veja a solução do problema 13 do nível 1.

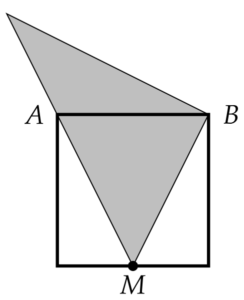
12. *Resposta:* 6066

Veja a solução do problema 14 do nível 1.

13. *Resposta:* 0040

Veja a solução do problema 15 do nível 1.

14. *Resposta:* 0030



O triângulo ABM tem área $\frac{AB \cdot d(M,AB)}{2} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18$ e $AM = BM = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$. Sendo h a altura do triângulo relativa a BM, $\frac{BM \cdot h}{2} = 18 \iff h = \frac{36}{BM} = \frac{36}{3\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$.

Logo sen $\angle AMB = \frac{h}{AM} = \frac{12/\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$, de modo que o triângulo retângulo sombreado é o triângulo $3-4-5$ com catetos $BM = 3\sqrt{5}$ e $4\sqrt{5}$. Sua área é $\frac{3\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{2} = 30$.

---

15. *Resposta:* 0050

Sabemos que $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = t \iff t \le \sqrt{k} < t+1 \iff t^2 \le k < (t+1)^2$. Como há $(t+1)^2 - t^2 = 2t+1$ números dentro desse intervalo,

$$\lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \cdots + \lfloor \sqrt{n} \rfloor = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + \cdots + (2t-1)(t-1) + (n - t^2 + 1) \cdot t,$$

em que $t = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

Como $\sum_{k=1}^{m} (2k+1)k = \sum_{k=1}^{m} 2k^2 + k = 2 \cdot \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m(m+1)(4m+5)}{6}$, usando esse fato para $m = t-1$,

$$\lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \cdots + \lfloor \sqrt{n} \rfloor = \frac{(t-1)t(4t+1)}{6} + (n - t^2 + 1) \cdot t.$$

Temos $\frac{6 \cdot 7 \cdot 29}{6} = 7 \cdot 29 = 203$ e $\frac{7 \cdot 8 \cdot 33}{6} = 7 \cdot 4 \cdot 11 = 308$, $t = 7$, de modo que

$$\lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \cdots + \lfloor \sqrt{n} \rfloor = 217 \iff 203 + (n - 48) \cdot 7 = 217 \iff n = 50.$$

Observação: É claro que é possível calcular diretamente sem achar a fórmula fechada para a soma: sendo $S_n = \lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \cdots + \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, calcula-se usando as parcelas S_n para $n = 3, 8, \ldots, 7^2 - 1 = 48$ e adiciona-se 7 mais duas vezes:

n	3	8	15	24	35	48
S_n	3	$3 + 2 \cdot 5 = 13$	$13 + 3 \cdot 7 = 34$	$34 + 4 \cdot 9 = 70$	$70 + 5 \cdot 11 = 125$	$125 + 6 \cdot 13 = 203$

Com isso, $S_{49} = 203 + 7 = 210$ e $S_{50} = 210 + 7 = 217$.

1ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 3 (Ensino Médio)

Respostas

Testes

1. D	2. C	3. B	4. A	5. C
6. E	7. C	8. C	9. D	10. C

Respostas Numéricas

Problema	11	12	13	14	15
Resposta	0015	0030	0019	0015	0232

Soluções – Testes

1. *Alternativa D*

Veja a solução do problema 1 do nível 1.

---

2. *Alternativa C*

Veja a solução do problema 9 do nível 1.

---

3. *Alternativa B*

Veja a solução do problema 6 do nível 2.

---

4. *Alternativa A*

Note que f é uma função que admite a inversa g tal que $x = 2g(x) - 1 \iff g(x) = \frac{x+1}{2}$. Assim, $f(f(\ldots f(x)\ldots)) = 0 \iff x = g(g(\ldots g(x)\ldots))$, em que g é aplicada o mesmo número de vezes que f, ou seja, 2022 vezes.

Observamos que $g(0) = \frac{1}{2}$, $g(g(0)) = \frac{1+1/2}{2} = \frac{3}{4}$ e $g(g(g(0))) = \frac{1+3/4}{2} = \frac{7}{8}$, o que sugere que $g(g(\ldots g(0)\ldots)) = 1 - \frac{1}{2^k}$, em que g é aplicada k vezes.

Isso é provado por uma indução: aplicando g a $1 - \frac{1}{2^k}$ obtemos $g\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = \frac{1+1-\frac{1}{2^k}}{2} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$, o que conclui nossa indução. Logo $x = 1 - \frac{1}{2^{2022}}$.

---

5. *Alternativa C*

A formiga precisa ir 3 vezes para três sentidos diferentes (as três dimensões do cubo). Simbolizando ir nos sentidos por A, B e C, a quantidade é o número de anagramas de $AAABBBCCC$, que são $\frac{9!}{3!\,3!\,3!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{6\cdot 6} = 3\cdot 4\cdot 7\cdot 5\cdot 4 = 1680$.

---

6. *Alternativa E*

Veja a solução do problema 9 do nível 2.

---

7. *Alternativa C*

Podemos fixar qualquer um dos pontos médios das arestas. Cada aresta tem quatro arestas adjacentes (com um vértice comum), quatro arestas reversas, uma aresta oposta e duas arestas paralelas na mesma face. Com isso, pela simetria, há quatro ângulos diferentes que podem ser obtidos. Pode-se verificar que esses ângulos medem 60° (adjacentes), 120° (reversas), 180° (opostas) ou 90° (paralelas na mesma face).

8. *Alternativa C*

Pela fórmula de Heron, a área de um triângulo de lados $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ e $\sqrt{c}$ é

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2}\right)\left(\frac{-\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}{2}\right)}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2-a}{4}\right)\left(\frac{a-\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{4}\right)}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{b+c-a+2\sqrt{bc}}{4}\right)\left(\frac{-b-c+a+2\sqrt{bc}}{4}\right)}=\sqrt{\frac{4bc-(b+c-a)^2}{16}}$$

Para $a = 1$, $b = 2$ e $c = 5$, obtemos como área

$$\sqrt{\frac{4\cdot 2\cdot 5-(2+5-1)^2}{16}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2},$$

de modo que um triângulo de lados $\sqrt{1}=1$, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ é manhoso.

Como $a+b+c \geq 1+2+3 = 6$, há outros dois triângulos possíveis com soma $a+b+c$ menor do que $1+2+5 = 8$: o triângulo de lados $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, que tem área $\sqrt{\frac{4\cdot2\cdot3-(2+3-1)^2}{16}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e o triângulo de lados $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{4}$, que tem área $\sqrt{\frac{4\cdot2\cdot4-(2+4-1)^2}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$. Essas áreas não são números racionais, de modo que o menor valor para a soma $a+b+c$ é 8.

9. *Alternativa D*

Um conjunto espetacular com 8 elementos é $\{1,4,6,9,11,14,16,19\}$, que tem quatro números que deixam resto 1 e quatro que deixam resto 4 na divisão por 5; as possíveis somas módulo 5 são, então, $1+1+1 \equiv 3 \pmod 5$, $1+1+4 \equiv 1 \pmod 5$, $1+4+4 \equiv 4 \pmod 5$ e $4+4+4 \equiv 2 \pmod 5$.

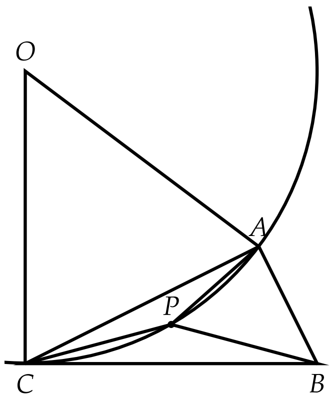
Suponha que um subconjunto $S \subset \{1,2,\ldots,20\}$ tenha nove ou mais elementos. Assim, como há no máximo 4 elementos para cada resto na divisão por 5, há pelo menos três restos diferentes. Se um deles é 0, pode-se escolher no máximo um dos restos 1 ou 4 e no máximo um dos restos 2 ou 3, ou seja, há exatamente três restos distintos. Há no máximo dois números que deixam resto 0, de modo que há pelo menos $9-2=7$ nos outros dois restos, ou seja, há quatro de um resto e três do outro. Multiplicando todos os números por um valor conveniente, podemos supor que o resto 1 aparece quatro vezes, de modo que o outro resto, que aparece pelo menos 3 vezes, é 2 ou 3. Mas $1+1+3 \equiv 0 \pmod 5$ e $1+2+2 \equiv 0 \pmod 5$, de modo que esse caso não é possível.

Assim, não aparece múltiplo de 5, e só temos quatro restos disponíveis (1 a 4). Um desses restos, que novamente podemos supor que é 1, aparece pelo menos três vezes. Isso faz com que tenhamos nenhum 3 (pois $3+1+1 \equiv 0 \pmod 5$). Assim, os restos que aparecem são 1, 2 e 4. Há no máximo um 2 (pois $2+2+1 \equiv 0 \pmod 5$), logo há quatro restos 1, um resto 2 e quatro restos 4. Mas aí $4+4+2 \equiv 0 \pmod 5$. Novamente, não é possível.

Logo a quantidade máxima de elementos de um subconjunto espetacular de $\{1,2,\ldots,20\}$ é 8.

10. *Alternativa C*

Observando que $\angle PAC = \angle PCB$, construa o circuncírculo de APC, que é tangente a BC.



Seja R o raio desse círculo. Então, da tangência, $\angle AOC = 2\angle ACB$, de modo que

$$AC = 2R \operatorname{sen} \angle ACB = 2R \cdot \frac{AB}{BC} \implies \frac{AC}{AB} = \frac{2R}{BC}.$$

Finalmente, no triângulo PCB, $BC = 2PC \cos 15^\circ$ e, pela lei dos senos, $PC = 2R \operatorname{sen} \angle PAC = 2R \operatorname{sen} 15^\circ$. Portanto $BC = 2 \cdot 2R \operatorname{sen} 15^\circ \cos 15^\circ = 2R \operatorname{sen} 30^\circ = R$.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{2R}{BC} = \frac{2R}{R} = 2.$$

Soluções – Respostas numéricas

11. *Resposta:* 0015

Temos que $\frac{y}{x} = y - 2022$ é inteiro. Assim, $y = kx$, $x \neq 0$ e k inteiro, e obtemos

$$kx - k = 2022 \iff (x-1)k = 2022.$$

Assim, k é divisor de $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$, que tem $2(1+1)(1+1)(1+1) = 16$ divisores (incluindo negativos). Temos $x - 1 = \frac{2022}{k}$, e a única possibilidade que não serve é $x = 0$ (pois x está no denominador na equação original), o que ocorre para $k = -2022$.

Logo a equação tem $16 - 1 = 15$ soluções (x, y) inteiras.

---

12. *Resposta:* 0030

Veja a solução do problema 14 do nível 2.

---

13. *Resposta:* 0019

Para obter um polinômio que satisfaz $P(0) = 1$ e $P(3) = 100$, considere $Q(x) = P(x) - 33x - 1$, obtido subtraindo de P a equação da reta que passa por $(0, 1)$ e $(3, 100)$. Temos $Q(0) = Q(3) = 0$, de modo que $Q(x) = x(x-3)R(x)$, ou seja, $P(x) = x(x-3)R(x) + 33x + 1$, em que $R(x)$ tem coeficientes inteiros. Nesse caso, $P(10) = 10 \cdot 7R(10) + 331 = 70(R(10) + 5) - 19$, cujo menor valor em valor absoluto é 19. Fazendo $R(x) = -5$, obtemos um polinômio $P(x) = -5x(x-3) + 33x + 1$ válido.

---

14. *Resposta:* 0015

Cada pessoa retira de sua pilha independentemente. Sendo N a quantidade de chocolates na pilha, se N é ímpar a quantidade de chocolates no bolso aumenta em 1 e a pilha tem $N - 1$ chocolates e se N é par, a quantidade de chocolates na pilha muda para $N/2$.

Vendo na base 2, se N termina em 1 a quantidade de chocolates no bolso aumenta em 1 e a quantidade de chocolates na pilha é obtida trocando o 1 das unidades por 0. Se N termina em 0, a quantidade de chocolates no bolso não muda e a quantidade de chocolates na pilha, $N/2$, é obtida "cortando" o 0 das unidades. Com isso, a quantidade de chocolates é igual ao número de dígitos 1 na base 2 da quantidade inicial de chocolates na pilha.

Assim, como $2022 = 11111100110_2$, Elon sempre obtém 8 chocolates. Agora, para $n > 10$, $2^n - 2022 = 1000\ldots00_2 - 11111100110_2 = 111\ldots00000011010_2$, em que há $n - 11$ uns à esquerda. O total de chocolates de Jacob é igual a $n - 11 + 3 = n - 8$. Essa quantidade é menor do que a de Elon quando $n - 8 \leq 7 \iff n \leq 15$. O maior valor de n é 15.

---

15. *Resposta:* 0232

Numere as linhas de 1 a 7. Se Esmeralda liga o ponto da linha i na esquerda ao ponto da linha j na direita, ela deve ligar o ponto da linha j na esquerda ao ponto da linha i na direita. O problema é então equivalente a particionar o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ em conjuntos de 1 ou 2 elementos. Dividimos nos seguintes casos:

- Nenhum conjunto de dois elementos: só há 1 possibilidade.
- Um conjunto de dois elementos: há $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ possibilidades.
- Dois conjuntos de dois elementos: escolhemos os quatro números a, b, c, d envolvidos de $\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$ maneiras e depois escolhemos o outro elemento x de $\{a, x\}$ de 3 maneiras, e há $35 \cdot 3 = 105$ possibilidades.
- Três conjuntos de dois elementos: escolhemos o que não está envolvido nesses conjuntos de 7 maneiras. Sendo a, b, c, d, e, f os números, escolhemos o "parceiro" de a de 5 maneiras e o "parceiro" do menor número que sobrou de 3 maneiras (tiramos 3 antes). Há $7 \cdot 5 \cdot 3 = 105$ possibilidades.

O total de desenhos que Esmeralda pode fazer é, então, $1 + 21 + 105 + 105 = 232$.