*Oct 2022*

**1.** Letícia tem um tabuleiro com $9 \times 9$ casas. Dizemos que duas casas são *amigas* se compartilham um lado ou se estão em uma mesma coluna, mas em extremos opostos, ou se estão em uma mesma linha, mas em extremos opostos. Dessa forma, toda casa possui exatamente 4 casas amigas.

Letícia irá pintar cada casa com uma das três cores: verde, azul ou vermelho. Uma vez que todas as casas estejam pintadas, em cada uma será escrito um número, de acordo com as seguintes regra:

- Se a casa é verde, é escrita a quantidade de casas amigas vermelhas mais duas vezes a quantidade de casas amigas azuis.
- Se a casa é vermelha, é escrita a quantidade de casas amigas azuis mais duas vezes a quantidade de casas amigas verdes.
- Se a casa é azul, é escrita a quantidade de casas amigas verdes mais duas vezes a quantidade de casas amigas vermelhas.

Sabendo que Letícia pode escolher a coloração das casas do tabuleiro, encontre o valor máximo que ela pode obter, para a soma dos números em todas as casas.

**2.** Encontre todos os trios $(p, q, r)$, de inteiros positivos tais que $p$ e $q$ são primos (não necessariamente distintos), $r$ é par e

$$p^3 + q^2 = 4r^2 + 45r + 103.$$

**3.** Seja $ABC$ um triângulo acutângulo com $AB < BC$. Sobre o segmento $BC$ são escolhidos os pontos $P$ e $Q$ tais que $\angle BAP = \angle CAQ < \frac{\angle BAC}{2}$. Seja $B_1$ um ponto no segmento $AC$. $BB_1$ intercecta $AP$ e $AQ$ em $P_1$ e $Q_1$, respectivamente. As bissetrizes internas de $\angle BAC$ e $\angle CBB_1$ se cortam em $M$. Se $PQ_1 \perp AC$ e $QP_1 \perp AB$, mostre que $AQ_1MPB$ é cíclico.

Language: Portuguese

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

**Para tornar esta uma competição justa e agradável para todos, por favor não mencione ou se refira aos problemas na internet ou em redes sociais até que as organizadoras os publiquem oficialmente.**

*27 Oct 2022*

**4.** Seja $\triangle ABC$ um triângulo, com $AB \neq AC$. Sejam $O_1$ e $O_2$ os centros das circunferências $\omega_1$ e $\omega_2$ com diâmetros $AB$ e $BC$, respectivamente. Seja $P$ um ponto no segmento $BC$ tal que $AP$ intersecta $\omega_1$ no ponto $Q$, com $Q \neq A$. Mostre que os pontos $O_1, O_2$ e $Q$ são colineares se, e somente se, $AP$ é a bissetriz interna do ângulo $\angle BAC$.

**5.** Encontre todos os inteiros positivos $k$, para os quais existem $a, b$ e $c$ inteiros positivos, tais que

$$|(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3| = 3 \cdot 2^k$$

*Nota:* Dado qualquer número real $x$, o **valor absoluto** de $x$ é denotado por $|x|$, com uma barra vertical em cada lado do número, e é definida como

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

por exemplo, $|-3| = 3$

**6.** Ana e Bety jogam um jogo em turnos alternados. Inicialmente, Ana escolhe um inteiro positivo $n$, ímpar e composto, tal que $2^j < n < 2^{j+1}$, com $2 < j$. No seu primeiro turno, Bety escolhe um inteiro positivo ímpar e composto $n_1$ tal que

$$n_1 \leq \frac{1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n}{2(n-1)^{n-1}}.$$

Depois disso, na sua vez, Ana escolhe um número primo $p_1$ que divide $n_1$. Se o primo escolhido por Ana for 3, 5 ou 7, então Ana ganha. Caso contrário, Bety escolhe um inteiro positivo $n_2$, ímpar e composto, tal que

$$n_2 \leq \frac{1^{p_1} + 2^{p_1} + \ldots + (p_1-1)^{p_1}}{2(p_1-1)^{p_1-1}}.$$

Depois disso, na sua vez, Ana escolhe um primo $p_2$ que divide $n_2$. Se $p_2$ é $3, 5$ ou $7$, Ana ganha. Caso contrário, o processo se repete. Além disso, Ana ganha em qualquer momento se Bety não pode escolher um inteiro positivo, ímpar e composto, no intervalo dado. Bety ganha se consegue jogar pelo menos $j-1$ vezes. Determine qual das jogadoras possui a estratégia ganhadora.

Language: Portuguese

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

**Para tornar esta uma competição justa e agradável para todos, por favor não mencione ou se refira aos problemas na internet ou em redes sociais até que as organizadoras os publiquem oficialmente.**