XIV Competencia Iberoamericana Interuniversidades de Matemáticas

Primeiro dia

27 de setembro de 2022

Problema 1. Dada a função $f(x) = x^2$, o *setor* de f de a a b é definido como a região limitada entre o gráfico de $y = f(x)$ e o segmento de reta que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Se define a sequência crescente $x_0, x_1, \ldots$ com $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$, e tal que a área do setor de f de x_n até x_{n+1} é constante para $n \geq 0$. Determine o valor de x_n em função de n.

Problema 2. Seja $v \in \mathbb{R}^2$ um vetor de comprimento 1, e seja A uma matriz 2×2 com entradas reais tais que:

(i) Os vetores Av, A^2v e A^3v também têm comprimento 1.

(ii) O vetor A^2v não é igual a $\pm v$ nem a $\pm Av$.

Prove que $A^tA = I_2$.

Nota: A^t denota a transposta da matriz A, e I_2 é a matriz identidade 2×2.

Problema 3. Danielle desenha no plano um ponto O e um conjunto de pontos $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \ldots, P_{2022}\}$ tais que

$$\angle P_0OP_1 = \angle P_1OP_2 = \cdots = \angle P_{2021}OP_{2022} = \alpha, \quad 0 < \alpha < \pi,$$

onde os ângulos são medidos em sentido anti-horário e para $0 \leq n \leq 2022$ vale $OP_n = r^n$ com $r > 1$ um número real dado. Em seguida, obtém novos conjuntos de pontos no plano iterando o seguinte processo: dado um conjunto de pontos $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ no plano, constrói-se um novo conjunto de pontos $\{B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}\}$ de modo que $A_kA_{k+1}B_k$ seja un triângulo equilátero orientado em sentido horário para $0 \leq k \leq n-1$. Depois de realizar o processo 2022 vezes a partir do conjunto $\mathcal{P}$, Danielle obtém um único ponto X. Se d é a distância de X ao ponto O, demonstrar que

$$(r-1)^{2022} \leq d \leq (r+1)^{2022}.$$

Tempo máximo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 10 puntos

XIV Competencia Iberoamericana Interuniversitaria de Matemáticas

Segundo dia

28 de setembro de 2022

Problema 4. Dado um inteiro positivo n, determine quantas permutações σ do conjunto $\{1, 2, \dots, 2022n\}$ têm a seguinte propriedade: para cada $i \in \{1, 2, \dots, 2021n + 1\}$, o número

$$\sigma(i) + \sigma(i+1) + \cdots + \sigma(i+n-1)$$

é um múltiplo de n.

Problema 5. Defina no plano a sequência de vetores $v_1, v_2, \dots$ com valores iniciais $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e satisfazendo a relação

$$v_n = \frac{v_{n-1} + v_{n-2}}{\|v_{n-1} + v_{n-2}\|},$$

para $n \geq 3$. Demonstrar que a sequência é convergente e determinar o seu limite.

Nota: A expressão $\|v\|$ denota o comprimento do vetor v.

Problema 6. Dado um inteiro positivo m, seja $d(m)$ o número de divisores positivos de m. Mostre que para todo inteiro positivo n vale que

$$d((n+1)!) \leq 2d(n!).$$

Tempo máximo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 10 puntos