XXXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Primeiro Dia

28 de Setembro de 2022

Problema 1. Seja ABC um triângulo equilátero com circuncentro O e circunferência circunscrita Γ. Seja D um ponto sobre o arco menor BC, com $DB > DC$. A mediatriz de OD intersecta Γ em E e F, com E sobre o arco menor BC. Seja P o ponto de interseção de BE com CF. Prove que PD é perpendicular a BC.

Problema 2. Seja $S = \{13, 133, 1333, \dots\}$ o conjunto dos inteiros positivos da forma $1\overbrace{3\dots3}^{n\text{ dígitos}}$, com $n \geq 1$. Considere uma fila horizontal de 2022 casas, inicialmente vazias. Ana e Borja jogam da seguinte maneira: cada um, em sua jogada, escreve um dígito de 0 a 9 na casa vazia situada mais à esquerda. Começa a jogar Ana; depois eles jogam alternadamente até que todas as casas estejam preenchidas. Quando o jogo termina, na fila lê-se, da esquerda para a direita, um número N de 2022 dígitos. Borja ganha se N for divisível por algum dos números pertencentes a S; caso contrário Ana ganha. Determine qual dos jogadores tem uma estratégia vencedora e descreva-a.

Problema 3. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Determine todas as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem simultaneamente as seguintes condições:

(*i*) $f(yf(x)) + f(x-1) = f(x)f(y)$, para todos x, y em $\mathbb{R}$.

(*ii*) $|f(x)| < 2022$, para todo x com $0 < x < 1$.

Tempo: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 7 pontos.

XXXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Segundo Dia

29 de Setembro de 2022

Problema 4. Seja $n > 1$ um inteiro positivo. Considere uma fila horizontal de n casas onde cada casa está pintada de azul ou vermelho. Dizemos que um *bloco* é uma sequência de casas consecutivas da mesma cor. Arepito, o caranguejo, está inicialmente parado na primeira casa, no extremo esquerdo da fila. Em cada turno, ele conta o número m de casas pertencentes ao maior bloco que contém a casa em que ele está, e faz uma das seguintes ações:

- Se a casa em que ele está é azul e há pelo menos m casas à direita dele, Arepito se move m casas para a direita;
- Se a casa em que ele está é vermelha e há pelo menos m casas à esquerda dele, Arepito se move m casas para a esquerda;
- Em qualquer outro caso, ele permanece na mesma casa e não se move mais.

Para cada n, determine o menor inteiro k para o qual existe uma coloração inicial da fila com k casas azuis tal que Arepito consegue chegar à última casa, no extremo direito da fila.

Problema 5. Seja ABC um triângulo acutângulo com circunferência circunscrita Γ. Sejam P e Q pontos no semiplano definido por BC que contém A, tais que BP e CQ são tangentes a Γ com $PB = BC = CQ$. Sejam K e L pontos distintos de A sobre a bissetriz externa do ângulo $\angle CAB$, tais que $BK = BA$ e $CL = CA$. Seja M o ponto de interseção das retas PK e QL. Prove que $MK = ML$.

Problema 6. Seja $\mathbb{Z}^+$ o conjunto dos inteiros positivos. Determine todas as funções $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tais que

$$f(a)f(a+b) - ab$$

é um quadrado perfeito para todos a, b em $\mathbb{Z}^+$.

Tempo: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 7 pontos.