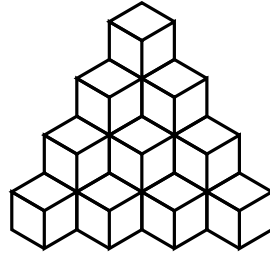


# 44ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 1 (6º ou 7º ano)



1. Janaína montou a figura em formato de pirâmide, como mostrado no desenho a seguir. A figura foi feita colando cubinhos de mesmo tamanho. Há 1 cubinho na primeira camada superior, 3 cubinhos na segunda e 6 cubinhos na terceira.



- (a) Quantos cubinhos ela usou na base (quarta camada)? Ela pintou todas as faces da figura, incluindo as laterais e a parte de baixo que não aparecem no desenho.
- (b) Quantos cubinhos terão exatamente 3 faces pintadas?
- (c) Quantos cubinhos terão exatamente 1 face pintada?

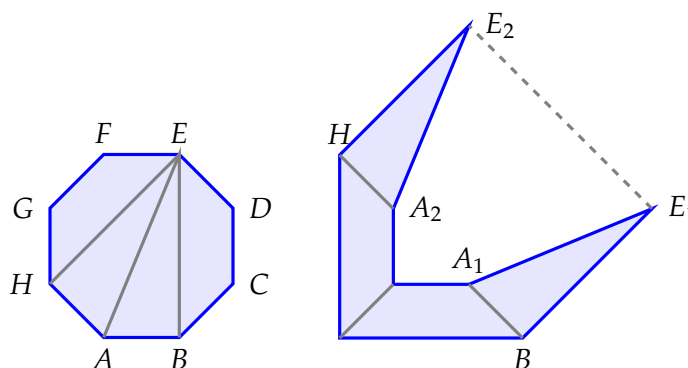
2. Um inteiro positivo é dito *copeiro* se a soma dos quadrados dos seus algarismos na representação decimal é igual a uma quarta potência. Por exemplo, 32111 é um número copeiro de 5 algarismos, pois  $3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 16 = 2^4$ .

- (a) Existe um número de 3 algarismos tal que a soma dos quadrados dos algarismos é igual a  $4^4$ ? Não se esqueça de que você deve justificar suas respostas.
- (b) Quais são os dois maiores números copeiros de 3 algarismos?

3. (a) Pedro montou um quadrado de lado 2 usando quatro quadradinhos de lado 1. Ligando os pontos médios dos lados do quadrado maior, Pedro montou um quadrado destacado na figura. Determine a área e o perímetro do quadrado destacado.



(b) Pedro tomou um octógono regular  $ABCDEFGH$  de papel de lado 1. Ele o recortou em 4 partes, mudou suas posições e montou a segunda figura. Note que os triângulos  $ABE$  e  $AHE$  correspondem aos triângulos  $A_1BE_1$  e  $A_2HE_2$ .



Calcule os ângulos internos do trapézio  $BCDE$ .

Você pode utilizar que cada ângulo interno do polígono regular de  $n$  lados tem medida  $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$ .

- (c) Explique por que os pontos  $B$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  e  $H$  estão sobre uma mesma reta na segunda figura.
- (d) Determine a medida do segmento  $E_1E_2$ .

---

4. Oito times de futebol disputam um torneio em que cada time joga exatamente uma vez com cada um dos outros. Cada vitória vale 3 pontos, uma derrota vale 0 ponto e, em caso de empate, cada time ganha 1 ponto.

- (a) Prove que não é possível um time ter 3 vitórias e todos os outros terem 4 ou mais vitórias.
- (b) Mostre que é possível que, no final do torneio, o time que fez mais pontos tenha tido menos vitórias que cada um dos outros times.
- (c) Suponha que um dos times teve mais pontos que todos os outros e menos vitórias que todos. Qual é o menor número de vitórias que esse time pode ter obtido?

---

5. Um número inteiro positivo  $N$  é dito *2022-partido* quando tem as seguintes propriedades:

- Possui  $2k$  algarismos para algum inteiro positivo  $k$ .
- Sendo  $X$  o número formado pelos  $k$  primeiros algarismos na mesma ordem que aparecem em  $N$  e  $Y$  o número formado pelos  $k$  últimos algarismos de  $N$  na ordem que aparecem em  $N$ ,  $N = 20 \cdot X + 22 \cdot Y$ .

Por exemplo, 2022 e 101045 não são 2022-partidos, pois  $20 \cdot 20 + 22 \cdot 22 = 884 \neq 2022$  e  $20 \cdot 101 + 22 \cdot 45 = 3010 \neq 101045$ .

- (a) Determine todos os números 2022-partidos de 2 algarismos.
- (b) Determine todos os números 2022-partidos de 4 algarismos.
- (c) Determine todos os números 2022-partidos de 6 ou mais algarismos.
-