# 44ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

**Fase Única – Nível 2 (8º ou 9º ano)**

**PRIMEIRO DIA**

---

**1.** Um jogo para uma pessoa tem as seguintes regras: inicialmente há dez pilhas de pedras, com 1, 2, 3, ..., 10 pedras, respectivamente. Uma jogada consiste em fazer uma das duas seguintes operações:

(i) escolher duas pilhas, cada uma com pelo menos duas pedras, juntá-las e depois adicionar mais duas pedras a nova pilha;

(ii) escolher uma pilha com pelo menos 4 pedras, tirar duas pedras dela e separá-la em duas pilhas de quantidades de pedras positivas escolhidas pelo jogador.

O jogo continua até não ser mais possível fazer uma operação.

(a) Dê um exemplo de uma sequência de jogadas que conduzem ao término do jogo.

(b) Faça uma tabela informando qual é o número total de pedras e o número de pilhas no início e após cada uma das 5 primeiras operações no seu exemplo acima.

(c) Mostre que o número de pilhas com apenas uma pedra ao final do jogo é sempre o mesmo, independentemente de como se realizam as jogadas.

---

**2.** Os números reais $a$, $b$, $c$ são diferentes de zero e cumprem o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a + ab = c \\ b + bc = a \\ c + ca = b \end{cases}$$

Determine os possíveis valores de $abc$.

---

**3.** Seja $ABC$ um triângulo com incentro $I$ e seja $\Gamma$ sua circunferência circunscrita. Sejam $M$ o ponto médio de $BC$, $K$ o ponto médio do arco $BC$ que não contém $A$, $L$ o ponto médio do arco $BC$ que contém $A$ e $J$ a reflexão de $I$ pela reta $KL$. A reta $LJ$ intersecta $\Gamma$ novamente no ponto $T \neq L$. A reta $TM$ intersecta $\Gamma$ novamente no ponto $S \neq T$. Prove que $S$, $I$, $M$ e $K$ estão sobre uma mesma circunferência.

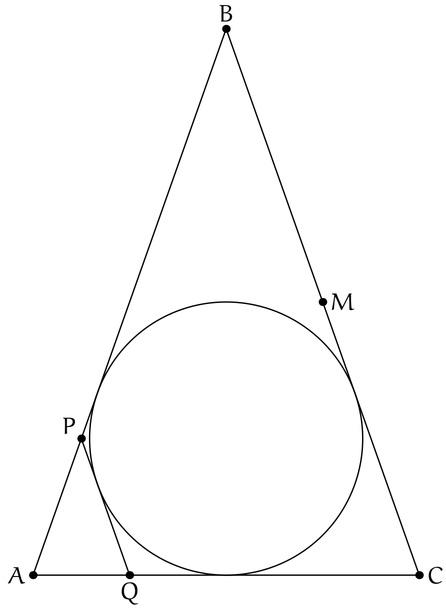
# 44ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

**Fase Única – Nível 2 (8º ou 9º ano)**

**SEGUNDO DIA**

---

**4.** Na figura, $PQ$ e $BC$ são paralelos, $AB = BC$ e $MB = MC$. Além disso, $\angle CQM = \angle MQP$ e $PQ$ é tangente à circunferência inscrita ao triângulo $ABC$.




Dado que $AQ = 1$, calcule o perímetro do triângulo $ABC$.

---

**5.** Inicialmente um número está escrito no quadro. Então, a cada minuto, Esmeralda escolhe um divisor $d > 1$ do número $n$ escrito na lousa, apaga $n$ e escreve $n + d$. Se o número inicial é 2022, qual é o maior número composto que Esmeralda nunca poderá escrever no quadro?

---

**6.** Determine o maior inteiro positivo $k$ para o qual a seguinte afirmação é verdadeira: dados $k$ subconjuntos distintos do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 2023\}$, cada um com 1011 elementos, é possível particionar os subconjuntos em duas coleções de forma que quaisquer dois subconjuntos em uma mesma coleção possuem algum elemento em comum.