44ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 3 (Ensino Médio)

PRIMEIRO DIA

Olimpíada Brasileira de Matemática

---

1. Um jogo para uma pessoa tem as seguintes regras: inicialmente há dez pilhas de pedras, com 1, 2, 3, ..., 10 pedras, respectivamente. Uma jogada consiste em fazer uma das duas seguintes operações:

(i) escolher duas pilhas, cada uma com pelo menos duas pedras, juntá-las e depois adicionar mais duas pedras a nova pilha;

(ii) escolher uma pilha com pelo menos 4 pedras, tirar duas pedras dela e separá-la em duas pilhas de quantidades de pedras positivas escolhidas pelo jogador.

O jogo continua até não ser mais possível fazer uma operação.
Mostre que o número de pilhas com apenas uma pedra ao final do jogo é sempre o mesmo, independentemente de como se realizam as jogadas.

---

2. Seja ABC um triângulo acutângulo, com $AB < AC$. Sejam K o ponto médio do arco BC da circunferência circunscrita a ABC que não contém A e P o ponto médio do lado BC. Os pontos I_B e I_C são os exincentros relativos aos vértices B e C, respectivamente.
Seja Q a reflexão de K pelo ponto A. Mostre que P, Q, I_B e I_C estão sobre uma mesma circunferência.

---

3. Seja $(a_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de números inteiros. Defina $\Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n$, para n inteiro não negativo, $\Delta^2 a_n = \Delta^1(\Delta^1 a_n) = \Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n$, e assim por diante, ou seja, $\Delta^M a_n = \Delta^1(\Delta^{M-1} a_n) = \Delta^{M-1} a_{n+1} - \Delta^{M-1} a_n$. Uma sequência é *M-autorreferente* quando existem inteiros positivos k e ℓ tais que $a_{n+k} = \Delta^M a_{n+\ell}$ para todo n inteiro não negativo. Determine, com prova, se existe alguma sequência tal que o menor valor de M para o qual a sequência é M-autorreferente é 2022.

44ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 3 (Ensino Médio)

SEGUNDO DIA

---

4. Inicialmente um número está escrito no quadro. Então, a cada minuto, Esmeralda escolhe um divisor $d > 1$ do número n escrito na lousa, apaga n e escreve $n + d$. Se o número inicial é 2022, qual é o maior número composto que Esmeralda nunca poderá escrever no quadro?

---

5. Sendo n inteiro positivo, defina $S(n)$ como o menor inteiro positivo tal que $S(n)$ e n têm a mesma paridade, $S(n) \geq n$ e tais que **não** existam inteiros positivos $k, x_1, x_2, \ldots, x_k$ tais que $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ e $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 = S(n)$. Prove que existem uma constante real $c > 0$ e um inteiro positivo n_0 tal que $S(n) \geq cn^{3/2}$ para todo $n > n_0$.

---

6. Algumas casinhas de um tabuleiro 10×10 são pintadas de roxo. Um conjunto de seis casinhas é *especial* quando as casinhas são a interseção de três linhas e duas colunas, ou duas linhas e três colunas, e estão pintadas de roxo. Encontre o maior valor de n para o qual é possível pintar n casinhas do tabuleiro de roxo sem que apareça um conjunto especial.