44ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível Universitário

PRIMEIRO DIA

Olimpíada Brasileira de Matemática

---

1. Dado $0 < a < 1$, determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas em $x = 0$ tais que $f(x) + f(ax) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

---

2. Considere o conjunto G de matrizes 2×2 dado por

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Big| \, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1, c \text{ é múltiplo de } 3 \right\}$$

e as matrizes em G

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mostre que qualquer matriz de G pode ser escrita como um produto $M_1 M_2 \ldots M_r$ com $M_i \in \{A, A^{-1}, B, B^{-1}\}, \forall i \leq r$.

---

3. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de inteiros. Definimos $a_n^{(0)} = a_n$, para todo n natural. Para todo inteiro $M \geq 0$, definimos $(a_n^{(M+1)})_{n \in \mathbb{N}}$: $a_n^{(M+1)} = a_{n+1}^{(M)} - a_n^{(M)}, \forall n \in \mathbb{N}$. E dizemos que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é $(M+1)$-autorreferente se existem k_1 e k_2 naturais fixados, tais que $a_{n+k_1} = a_{n+k_2}^{(M+1)}, \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Existe uma sequência de inteiros tal que o menor M para o qual ela é M–autorreferente é $M = 2022$?

b) Existe uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos tal que o menor M para o qual ela é M–autorreferente é $M = 2022$?

44ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível Universitário

SEGUNDO DIA

---

1. Dados $c, \alpha > 0$, considere a sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ definida por $x_1 = c$ e $x_{n+1} = x_n e^{-x_n^\alpha}$ para $n \geq 1$. Para quais valores reais de β a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^\beta$ é convergente?

2.Dado $X \subset \mathbb{N}$, definimos $d(X)$ como sendo o maior $c \in [0,1]$ tal que, para quaisquer $a < c$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, existem $m, r \in \mathbb{N}$ com $r \geq n_0$ e $|X \cap [m, m+r)|/r \geq a$. Sejam $E, F \subset \mathbb{N}$ com $d(E)d(F) > 1/4$. Prove que, para qualquer p primo e $k \in \mathbb{N}$, existem $m \in E, n \in F$ com $m \equiv n \pmod{p^k}$.

3.Seja $p \equiv 3 \pmod 4$ um número primo, e seja θ um ângulo tal que $\tan(\theta)$ é racional. Prove que $\tan((p+1)\theta)$ é um número racional cujo numerador é múltiplo de p, ou seja, $\tan((p+1)\theta) = \frac{u}{v}$ com $u, v \in \mathbb{Z}$, $v > 0$, $\text{mdc}(u, v) = 1$ e $u \equiv 0 \pmod p$.