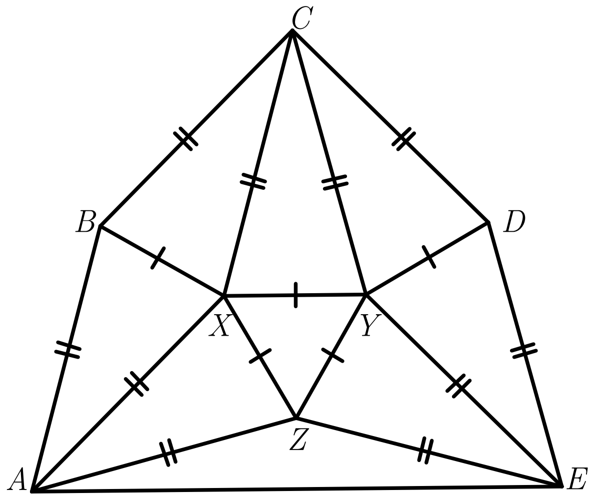
9ª **Olimpíada Iraniana de Geometria**

Nível Elementar: 7º e 8º anos.

14 de Outubro de 2022

Os problemas desta prova devem ser mantidos em sigilo até que sejam publicados no site oficial da IGO: igo-official.com

Problema 1. Determine os ângulos do pentágono $ABCDE$ na figura abaixo.



Problema 2. Um trapézio isósceles $ABCD$ ($AB \parallel CD$) é dado. Os pontos E e F estão nos lados BC e AD, e os pontos M e N estão no segmento EF de modo que $DF = BE$ e $FM = NE$. Sejam K e L os pés de retas perpendiculares de M e N a AB e CD, respectivamente. Prove que $EKFL$ é um paralelogramo.

Problema 3. Seja $ABCDE$ um pentágono convexo satisfazendo $AB = BC = CD$ e $\angle BDE = \angle EAC = 30°$. Encontre os valores possíveis de $\angle BEC$.

Problema 4. Seja D um ponto em BC tal que AD é bissetriz interna do triângulo ABC. Os incírculos dos triângulos ABC e ACD se tocam externamente. Prove que $\angle ABC > 120°$. (Lembre-se de que o incírculo de um triângulo é o círculo no interior do triângulo que é tangente aos seus três lados.)

Problema 5. a) Existem quatro triângulos equiláteros no plano tais que cada par tenha exatamente um vértice em comum e cada ponto do plano esteja no perímetro de no máximo dois deles?
b) Existem quatro quadrados no plano tais que cada par tenha exatamente um vértice em comum e cada ponto do plano esteja no perímetro de no máximo dois deles?
(Observe que em ambas as partes, não há suposição sobre a interseção do interior dos polígonos.)

Tempo: 4 horas.
Cada problema vale 8 pontos.

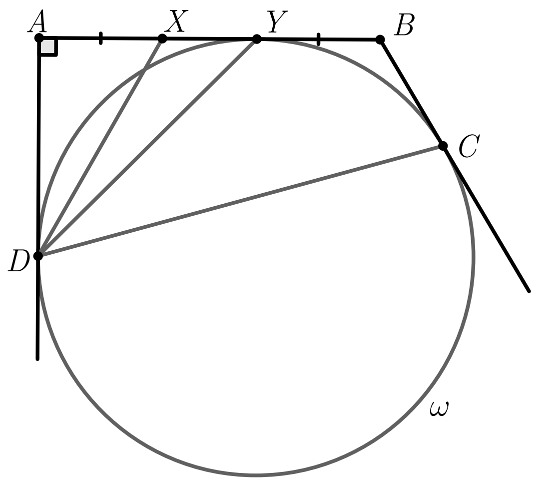
9ª **Olimpíada Iraniana de Geometria**

Nível Intermediário: 9º ano e 1ª série.

14 de Outubro de 2022

Os problemas desta prova devem ser mantidos em sigilo até que sejam publicados no site oficial da IGO: igo-official.com

Problema 1. Na figura abaixo, tem-se que $AX = BY$. Prove que $\angle XDA = \angle CDY$.



Problema 2. Duas circunferências, ω_1 e ω_2, de raios iguais se intersectam em dois pontos, E e X. Seja C um ponto pertencente a ω_1 e D um ponto pertencente a ω_2. As retas paralelas a XC e a XD por E intersectam ω_2 e ω_1 em A e B, respectivamente. Suponha que CD intersecte ω_1 e ω_2 novamente em P e Q, respectivamente. Prove que $ABPQ$ é um quadrilátero inscritível.

Problema 3. Seja O o circuncentro de um triângulo ABC. Pontos arbitrários M e N pertencem aos lados AC e BC, respectivamente. Pontos P e Q pertencem ao mesmo semiplano que C com respeito à reta MN, e satisfazem $\triangle CMN \sim \triangle PAN \sim \triangle QMB$ (nessa exata ordem). Prove que $OP = OQ$.

Problema 4. Chamamos dois polígonos simples P e Q de *compatíveis* se existe um inteiro positivo k tal que P pode ser particionado em k polígonos congruentes que são semelhantes a Q, e Q pode ser particionado em k polígonos congruentes que são semelhantes a P. Prove que para quaisquer dois inteiros pares $m, n \geq 4$, existem dois polígonos compatíveis com lados m e n.
(Um polígono é simples quando não intersecta a si mesmo.)

Problema 5. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência ω de centro O. Tome P como o ponto de interseção das diagonais AC e BD. Seja Q um ponto pertencente ao segmento OP. Defina E e F como as projeções ortogonais de Q nas retas AD e BC, respectivamente. Os pontos M e N pertencem ao circuncírculo do triângulo QEF de forma que $QM \parallel AC$ e $QN \parallel BD$. Prove que as duas retas ME e NF se encontram em um ponto na mediatriz do segmento CD.

Tempo: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 8 pontos.

9ª **Olimpíada Iraniana de Geometria**

Nível Avançado: 2ª e 3ª séries.

14 de Outubro de 2022

Os problemas desta prova devem ser mantidos em sigilo até que sejam publicados no site oficial da IGO: igo-official.com

Problema 1. Quatro pontos A, B, C, e D estão em um círculo ω de modo que $AB = BC = CD$. A reta tangente a ω em C intersecta a reta tangente a ω em A e a reta AD nos pontos K e L, respectivamente. O círculo ω e o circuncírculo do triângulo KLA se intersectam pela segunda vez em M. Prove que $MA = ML$

Problema 2. É dado um triângulo acutângulo ABC com $AB \neq AC$. Seja D um ponto em BC tal que DA é tangente ao circuncírculo do triângulo ABC. Sejam E e F os circuncentros dos triângulos ABD e ACD, respectivamente, e seja M o ponto médio de EF. Prove que a reta tangente ao circuncírculo de AMD em D também é tangente ao circuncírculo de ABC.

Problema 3. Em um triângulo ABC ($\angle A \neq 90°$), sejam O, H o circuncentro e o pé da altura de A, respectivamente. Suponha que M, N são os pontos médios de BC, AH, respectivamente. Seja D a intersecção de AO com BC e seja H' a reflexão de H por M. Suponha que o circuncírculo de $OH'D$ intersecta o circuncírculo de BOC em E. Prove que NO e AE concorrem num ponto sobre o circuncírculo de BOC.

Problema 4. Seja $ABCD$ um trapézio com $AB \parallel CD$. Suas diagonais se intersectam em P. A reta passando por P paralela a AB intersecta AD e BC em Q e R, respectivamente. As bissetrizes externas dos ângulos DBA, DCA se intersectam em X. Seja S o pé da reta perpendicular a BC por X. Suponha que os quadriláteros $ABPQ, CDQP$ são circunscritíveis. Prove que $PR = PS$.

Problema 5. Seja ABC um triângulo acutângulo inscrito num círculo ω de centro O. São dados pontos E, F sobre os lados AC, AB, respectivamente, de modo que O está em EF e $BCEF$ é cíclico. Sejam R, S as intersecções de EF com os arcos menores AB, AC de ω, respectivamente. Suponha que K, L são as reflexões de R por C e de S por B, respectivamente. Suponha que os pontos P e Q estão nas retas BS e RC, respectivamente, de modo que PK e QL são perpendiculares a BC. Prove que o círculo com centro P e raio PK é tangente ao circuncírculo de RCE se, e somente se, o círculo com centro Q e raio QL é tangente ao circuncírculo de BFS.

Tempo: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 8 pontos.