Sábado, 15 de abril de 2023

Problema 1. São dados $n \geqslant 3$ números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, defina $b_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}$ (aqui, definimos a_0 como a_n, e a_{n+1} como a_1). Suponha que, para todo i e j inteiros no intervalo de 1 a n, temos $a_i \leqslant a_j$ se, e somente se, $b_i \leqslant b_j$.

Mostre que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Problema 2. Seja ABC um triângulo acutângulo. Seja D o ponto no seu circuncírculo tal que AD é um diâmetro. Suponha que os pontos K e L pertencem aos segmentos AB e AC, respectivamente, e que DK e DL são tangentes ao circuncírculo do triângulo AKL.

Mostre que a reta KL passa pelo ortocentro de ABC.

O ortocentro de um triângulo é o ponto de interseção das suas alturas.

Problema 3. Seja k um inteiro positivo. Alexa tem um dicionário $\mathcal{D}$ que consiste em sequências de k letras, formadas apenas com as letras A e B. Lexi gostaria de escrever as letras A ou B em cada casa de um tabuleiro $k \times k$ de modo que cada coluna contém uma palavra de $\mathcal{D}$ quando lida de cima para baixo e cada linha contém uma palavra de $\mathcal{D}$ quando lida da esquerda para a direita.

Qual o menor valor inteiro de m de modo que se $\mathcal{D}$ possui pelo menos m palavras diferentes, então Alexa consegue preencher seu tabuleiro como deseja, independentemente das palavras em $\mathcal{D}$?

Language: Portuguese

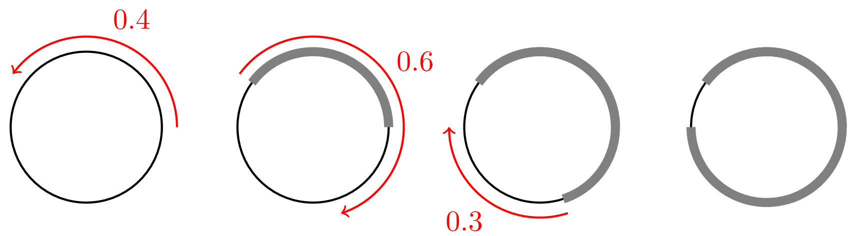
Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Os problemas são confidenciais até domingo 16 de abril, 22:00 UTC (19:00, horário de Brasília).

Domingo, 16 de abril 2023

Problema 4. Turbo, a lesma, está sobre um ponto de uma circunferência de perímetro 1. Dada uma sequência infinita de números reais positivos $c_1, c_2, c_3, \ldots$, Turbo percorre, sucessivamente, as distâncias $c_1, c_2, c_3, \ldots$ ao redor da circunferência, cada vez escolhendo fazê-lo no sentido horário ou anti-horário.

Por exemplo, se a sequência $c_1, c_2, c_3, \ldots$ é dada por $0.4, 0.6, 0.3, \ldots$, então Turbo pode começar o seu trajeto como segue:



Determine a maior constante $C > 0$ com a seguinte propriedade: para toda sequência de números reais positivos $c_1, c_2, c_3, \ldots$ com $c_i < C$ para todo i, Turbo pode (após estudar a sequência) garantir que existe um ponto da circunferência que nunca será visitado ou atravessado.

Problema 5. É dado um inteiro positivo $s \geqslant 2$. Para cada inteiro positivo k, definimos o seu *giro* k' como segue: se k é escrito como $as + b$, onde a, b são inteiros não negativos e $b < s$, então $k' = bs + a$. Dado o inteiro positivo n, considere a sequência infinita $d_1, d_2, \ldots$, em que $d_1 = n$ e d_{i+1} é o giro de d_i para cada inteiro positivo i.

Mostre que essa sequência contém o 1 se, e somente se, o resto quando n é dividido por $s^2 - 1$ é 1 ou s.

Problema 6. Seja ABC um triângulo com circuncírculo Ω. Sejam S_b e S_c os pontos médios dos arcos AC e AB, respectivamente, que não contêm o terceiro vértice. Seja N_a o ponto médio do arco BAC (o arco BC que contém A). Seja I o incentro de ABC. Seja ω_b a circunferência tangente a AB e internamente tangente a Ω em S_b e seja ω_c a circunferência tangente a AC e internamente tangente a Ω em S_c. Mostre que a reta IN_a e a reta que passa pelas interseções de ω_b e ω_c se encontram em Ω.

O incentro de um triângulo é o centro do seu incírculo, a circunferência interna ao triângulo que é tangente aos seus três lados.

Language: Portuguese

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Os problemas são confidenciais até domingo 16 de abril, 22:00 UTC (19:00, horário de Brasília).