



11^a Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa

Primeiro dia – 26 de maio de 2023

1. Antigamente, existiam marcianos de 3 cores diferentes: vermelhos, verdes e azuis. Como Marte foi devastada por uma guerra intergaláctica, sobraram apenas 2 marcianos de cada uma das cores. Para reconstruir a população marciana, eles decidiram usar uma máquina que transforma dois marcianos, de cores distintas, em quatro marcianos com a cor diferente dos dois iniciais. Por exemplo, se um marciano vermelho e um marciano azul usassem a máquina, seriam transformados em quatro marcianos verdes.
 - a) É possível que, após usar essa máquina um número finito de vezes, tenhamos 2022 marcianos vermelhos, 2022 marcianos verdes e 2022 marcianos azuis?
 - b) É possível que, após usar essa máquina um número finito de vezes, tenhamos 2021 marcianos vermelhos, 2022 marcianos verdes e 2023 marcianos azuis?
2. Seja D um ponto no interior de um triângulo ABC tal que $AD = CD$, $\angle DAB = 70^\circ$, $\angle DBA = 30^\circ$ e $\angle DBC = 20^\circ$. Determine a medida do ângulo $\angle DCB$.
3. Um número inteiro n será chamado de k – *especial*, com k um número inteiro e positivo, se é a soma dos quadrados de k inteiros consecutivos. Por exemplo, 13 é 2 – *especial*, pois $13 = 2^2 + 3^2$, e 2 é 3 – *especial*, pois $2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2$.
 - a) Prove que não existe um quadrado perfeito que é 4 – *especial*.
 - b) Determine um quadrado perfeito que seja l^2 – *especial*, para algum inteiro positivo l ímpar, com $l \geq 3$.

Duração: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos



11^a Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa

Segundo dia – 27 de maio de 2023

4. Um número inteiro positivo de três algarismos \overline{ABC} , será chamado de *Lusófono*, quando a soma $\overline{ABC} + \overline{CBA}$ é um quadrado perfeito. Determine todos os números Lusófonos.

Nota: $C \neq 0$ e \overline{ABC} representa o número de três algarismos em que o A ocupa a centena, B ocupa a dezena e C ocupa a unidade.

5. Seja $ABCDEF$ um hexágono regular de lado 1. Sejam X, Y pontos sobre os lados CD e DE , respectivamente, tais que o perímetro do triângulo DXY é igual a 2. Determine a medida do ângulo $\angle XAY$.

6. Uma calculadora tem duas teclas A e B e inicialmente ela exibe o número 1. Quando apertamos a tecla A , o número x exibido é transformado no número $1 + x$, e quando apertamos a tecla B , o número x exibido é transformado no número $\frac{x}{1+x}$. Por exemplo, o número 3 é transformado no número 4, ao apertar A , e o número $\frac{5}{2}$ é transformado no número $\frac{\frac{5}{2}}{1+\frac{5}{2}} = \frac{5}{7}$, ao apertar B .

- Partindo do número 1, determine a ordem que devemos apertar as teclas A e B de modo a exibir o número $\frac{20}{23}$. Apresente todas as possibilidades.
- Para cada número racional positivo $r \neq 1$, determine se é possível obtê-lo a partir de 1, apertando apenas as teclas A e B .

Duração: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos