

1ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 1 (6º ou 7º ano do Ensino Fundamental)

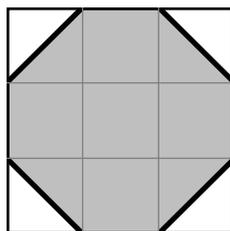
Testes

Importante: cada problema de 1 a 10 possui uma única alternativa como resposta.

1. Ronaldo gosta de correr na esteira. Ele nunca corre em dias de fim de semana, nunca corre em dois dias seguidos e nunca fica quatro dias seguidos sem correr. Qual das seguintes afirmações é correta sobre os dias de corrida de Ronaldo?

- (A) Ronaldo corre toda quinta-feira.
- (B) Ronaldo corre toda segunda-feira e toda sexta-feira.
- (C) Se Ronaldo correu numa quinta-feira, então ele necessariamente correu em 3 dias daquela semana.
- (D) Se Ronaldo correu numa quarta-feira, então ele necessariamente correu em 3 dias daquela semana.
- (E) Se Ronaldo não correu numa terça-feira, então ele necessariamente correu na quarta-feira daquela semana.

2. Para desenhar um octógono, Maria pegou um pedaço branco de papel em formato de quadrado de lado 3 e traçou com um lápis retas horizontais e verticais. Ela formou, assim, 9 quadradinhos de lado 1 e traçou as diagonais dos 4 quadradinhos das pontas, como na figura a seguir. Em seguida ela pintou o octógono de cinza.



Qual é a razão entre a área cinza e a área branca da figura?

- (A) $\frac{7}{2}$
- (B) 3
- (C) $\frac{7}{4}$
- (D) $\frac{5}{2}$
- (E) 2

3. A fração $\frac{37}{60}$ pode ser escrita como uma soma de frações de numerador unitário. Por exemplo, $\frac{37}{60} = \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{180}$. É possível escrever $\frac{37}{60}$ como a soma de três frações de numerador unitário cujos denominadores são números inteiros consecutivos maiores do que 1. Qual é a soma desses denominadores?

- (A) 9
- (B) 12
- (C) 15
- (D) 18
- (E) 21

4. Dentro de cada uma de duas caixas há uma bola vermelha ou uma bola verde. Na primeira caixa, do lado de fora, há um aviso: “Dentro de pelo menos uma das duas caixas há uma bola verde” e na segunda caixa há o aviso: “Há uma bola vermelha dentro da outra caixa”. Sabe-se que os dois avisos são ambos falsos ou ambos são verdadeiros. O que pode ser afirmado com certeza?

- (A) A bola dentro da primeira caixa é vermelha e na segunda caixa é verde.
- (B) A bola dentro da primeira caixa é verde e na segunda caixa é vermelha.
- (C) Nas duas caixas a bola é vermelha.
- (D) Nas duas caixas a bola é verde.
- (E) Não é possível ter certeza de que cor é a bola em cada caixa.

Respostas numéricas

Importante: para cada problema de 11 a 15 você deve indicar um número inteiro entre 0000 e 9999 como resposta.

11. Um número inteiro positivo é dito *umentante* se cada algarismo, a partir do segundo da esquerda, é maior que o algarismo imediatamente à esquerda. Por exemplo, 137 e 1479 são aumentantes, mas 44 e 890 não são. Existem quantos números aumentantes com 8 algarismos?

Resposta do problema 11:

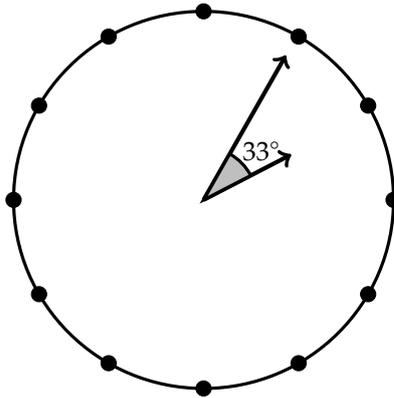
--	--	--	--

12. Ainda usando a definição de número aumentante do problema anterior, existem quantos números aumentantes, de qualquer quantidade de algarismos, divisíveis por 15?

Resposta do problema 12:

--	--	--	--

13. Maria observou que os ponteiros de um relógio analógico formavam um ângulo de 33° (sim, Maria mediu), como mostra a figura a seguir. Após algum tempo, menor do que uma hora, o ponteiro dos minutos (ponteiro maior) passou pelo ponteiro das horas (ponteiro menor) e formou novamente um ângulo de 33° . Quantos minutos se passaram?



Resposta do problema 13:

--	--	--	--

14. A calculadora do professor Piraldo tem só um botão. Ao apertá-lo, ele subtrai do número N no visor o seu maior divisor diferente de N . Por exemplo, se no visor aparece 75, o botão faz aparecer o número $75 - 25 = 50$. Suponha que a calculadora exiba o número 5^{2022} (a calculadora é bem grande!). Quantas vezes o botão deve ser apertado até que apareça 1 no visor pela primeira vez?

Resposta do problema 14:

--	--	--	--

15. As 9 casinhas de um tabuleiro 3×3 devem ser preenchidas com os números de 1 a 9, com um número em cada casinha. Um preenchimento é *sinuoso* quando todos os pares de números consecutivos ocupam casas vizinhas (com um lado em comum). O tabuleiro a seguir, por exemplo, é sinuoso:

1	2	9
4	3	8
5	6	7

Quantos são os tabuleiros sinuosos?

Resposta do problema 15:

--	--	--	--

1ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 1 (6º ou 7º ano do Ensino Fundamental)

Nome: _____

Escola: _____

Ano: () 6º () 7º

Testes

1.	A	B	C	D	E
2.	A	B	C	D	E
3.	A	B	C	D	E
4.	A	B	C	D	E
5.	A	B	C	D	E
6.	A	B	C	D	E
7.	A	B	C	D	E
8.	A	B	C	D	E
9.	A	B	C	D	E
10.	A	B	C	D	E

Respostas numéricas

11.				
12.				
13.				
14.				
15.				

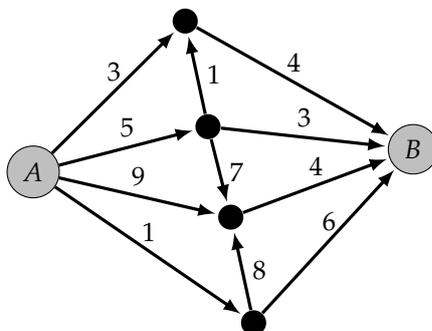
1ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 2 (8º ou 9º ano do Ensino Fundamental)

Testes

Importante: cada problema de 1 a 10 possui uma única alternativa como resposta.

1. Sônico, o tatu bola veloz, está caminhando pelas estradas do planeta Mobius coletando anéis. Abaixo está um mapa com a quantidade de anéis em cada estrada do reino:



Sabendo que Sônico partiu da cidade A até a cidade B, a diferença entre a maior e a menor quantidade de anéis que ele pode ter coletado é:

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

2. Dentro de cada uma de duas caixas há uma bola vermelha ou uma bola verde. Na primeira caixa, do lado de fora, há um aviso: “Dentro de pelo menos uma das duas caixas há uma bola verde” e na segunda caixa há o aviso: “Há uma bola vermelha dentro da outra caixa”. Sabe-se que os dois avisos são ambos falsos ou ambos são verdadeiros. O que pode ser afirmado com certeza?

- (A) A bola dentro da primeira caixa é vermelha e na segunda caixa é verde.
(B) A bola dentro da primeira caixa é verde e na segunda caixa é vermelha.
(C) Nas duas caixas a bola é vermelha.
(D) Nas duas caixas a bola é verde.
(E) Não é possível ter certeza de que cor é a bola em cada caixa.

3. Qual é a soma dos primeiros 2022 dígitos após a vírgula na representação decimal da fração $\frac{2021}{148}$?

- (A) 6066 (B) 6068 (C) 6073 (D) 9101 (E) 9110

4. Uma data é *especial* quando ocorre no dia k do mês k e cai no k -ésimo dia da semana (em que o primeiro dia da semana é domingo) para algum k , $1 \leq k \leq 7$. Por exemplo, 5 de maio de 2022 é especial, pois caiu na quinta-feira (nesse exemplo, $k = 5$). Qual é a maior quantidade de dias especiais que pode ocorrer em um ano?

Dados: Janeiro, Março e Maio têm 31 dias; Fevereiro tem 28 ou 29 dias; Abril e Junho têm 30 dias.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

5. A soma dos algarismos do número

$$20222022^2 + 20222021^2 - 2 \times 20222020 \times 20222019$$

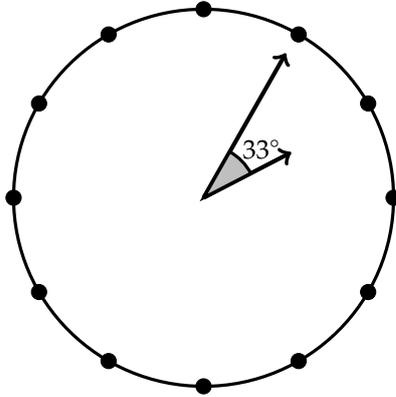
é igual a

- (A) 32 (B) 35 (C) 38 (D) 40 (E) 42

Respostas numéricas

Importante: para cada problema de 11 a 15 você deve indicar um número inteiro entre 0000 e 9999 como resposta.

11. Maria observou que os ponteiros de um relógio analógico formavam um ângulo de 33° (sim, Maria mediu), como mostra a figura a seguir. Após algum tempo, menor do que uma hora, o ponteiro dos minutos (ponteiro maior) passou pelo ponteiro das horas (ponteiro menor) e formou novamente um ângulo de 33° . Quantos minutos se passaram?



Resposta do problema 11:

12. A calculadora do professor Piraldo tem só um botão. Ao apertá-lo, ele subtrai do número N no visor o seu maior divisor diferente de N . Por exemplo, se no visor aparece 75, o botão faz aparecer o número $75 - 25 = 50$. Suponha que a calculadora exiba o número 5^{2022} (a calculadora é bem grande!). Quantas vezes o botão deve ser apertado até que apareça 1 no visor pela primeira vez?

Resposta do problema 12:

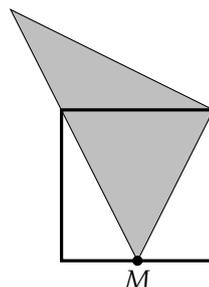
13. As 9 casinhas de um tabuleiro 3×3 devem ser preenchidas com os números de 1 a 9, com um número em cada casinha. Um preenchimento é *sinuoso* quando todos os pares de números consecutivos ocupam casas vizinhas (com um lado em comum). O tabuleiro a seguir, por exemplo, é sinuoso:

1	2	9
4	3	8
5	6	7

Quantos são os tabuleiros sinuosos?

Resposta do problema 13:

14. Na figura, M é ponto médio do lado de um quadrado de área 36. Qual é a área do triângulo retângulo cinza?



Resposta do problema 14:

15. Para cada x real denotamos $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro menor que ou igual a x . Por exemplo, $\lfloor 3,15 \rfloor = 3$. Sabendo que

$$\lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor + \cdots + \lfloor \sqrt{n} \rfloor = 217,$$

qual é o valor de n ?

Resposta do problema 15:

--	--	--	--

1ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 2 (8º ou 9º ano do Ensino Fundamental)

Nome: _____

Escola: _____

Ano: () 8º () 9º

Testes

1.	A	B	C	D	E
2.	A	B	C	D	E
3.	A	B	C	D	E
4.	A	B	C	D	E
5.	A	B	C	D	E
6.	A	B	C	D	E
7.	A	B	C	D	E
8.	A	B	C	D	E
9.	A	B	C	D	E
10.	A	B	C	D	E

Respostas numéricas

11.				
12.				
13.				
14.				
15.				

1ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 3 (Ensino Médio)

Testes

Importante: cada problema de 1 a 10 possui uma única alternativa como resposta.

1. Ronaldo gosta de correr na esteira. Ele nunca corre em dias de fim de semana, nunca corre em dois dias seguidos e nunca fica quatro dias seguidos sem correr. Qual das seguintes afirmações é correta sobre os dias de corrida de Ronaldo?

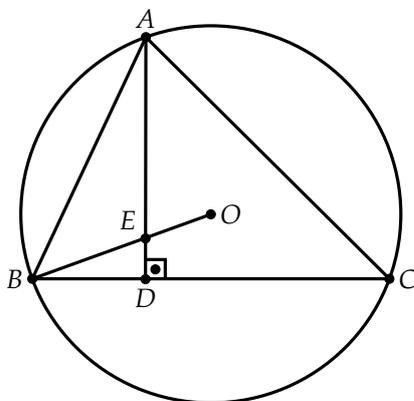
- (A) Ronaldo corre toda quinta-feira.
(B) Ronaldo corre toda segunda-feira e toda sexta-feira.
(C) Se Ronaldo correu numa quinta-feira, então ele necessariamente correu em 3 dias daquela semana.
(D) Se Ronaldo correu numa quarta-feira, então ele necessariamente correu em 3 dias daquela semana.
(E) Se Ronaldo não correu numa terça-feira, então ele necessariamente correu na quarta-feira daquela semana.

2. Uma data é *especial* quando ocorre no dia k do mês k e cai no k -ésimo dia da semana (em que o primeiro dia da semana é domingo) para algum k , $1 \leq k \leq 7$. Por exemplo, 5 de maio de 2022 é especial, pois caiu na quinta-feira (nesse exemplo, $k = 5$). Qual é a maior quantidade de dias especiais que pode ocorrer em um ano?

Dados: Janeiro, Março e Maio têm 31 dias; Fevereiro tem 28 ou 29 dias; Abril e Junho têm 30 dias.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

3. Na figura, AD é altura e O é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC . Sabendo que $\angle BAC = 72^\circ$, qual é a medida do ângulo $\angle AEB$?



- (A) 96° (B) 108° (C) 120° (D) 132° (E) 144°

4. Seja $f(x) = 2x - 1$. A raiz de $f(f(\dots f(x)\dots)) = 0$, em que f é aplicada 2022 vezes, é

- (A) $1 - \frac{1}{2^{2022}}$ (B) $2^{2022} - 1$ (C) $\frac{1}{2022}$ (D) $2022^2 - 1$ (E) $1 - \frac{1}{2022^2}$

5. Uma formiga está em um dos vértices de um emaranhado de arame em forma de cubo. Os arames formam as arestas dos 27 cubos unitários que formam um cubo maior de aresta 3. No vértice oposto está açúcar, e a formiga vai em direção do açúcar usando os arames como caminho. Quantos caminhos a formiga pode usar para chegar ao açúcar, andando o mínimo possível?

- (A) 720 (B) 1440 (C) 1680 (D) 2440 (E) 2880

6. As raízes da equação $x^2 - nx + m = 0$ são os números reais não nulos a e b . As raízes da equação $x^2 - 2nx + 2m = 0$ são a^2 e b^2 . O valor de $m + n$ é

- (A) $1 - \sqrt{5}$ (B) $3 - \sqrt{5}$ (C) $1 + \sqrt{5}$ (D) $2 + \sqrt{5}$ (E) $3 + \sqrt{5}$

7. Seja O o centro de um cubo. Ligamos O a todos os pares de pontos médios de arestas distintas do cubo, formando ângulos de vértice O . Quantas medidas diferentes de ângulos, incluindo o ângulo de 180° , são obtidas?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6
-

8. Um triângulo é *manhoso* quando cada um de seus lados tem medida da forma \sqrt{n} , n inteiro positivo, e sua área é racional. Por exemplo, o triângulo de lados $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{9} = 3$ é manhoso, pois sua área é $\frac{3}{2}$. Um triângulo de lados \sqrt{a} , \sqrt{b} e \sqrt{c} , com $a < b < c$, é manhoso. O menor valor possível de $a + b + c$ é

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10
-

9. Um conjunto S de números inteiros positivos é *espetacular* quando, para quaisquer $a, b, c \in S$ distintos dois a dois, $a + b + c$ **não** é múltiplo de 5. A maior quantidade de elementos em um conjunto espetacular que está contido em $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ é

- (A) 4 (B) 5 (C) 7 (D) 8 (E) 10
-

10. No interior do triângulo ABC , retângulo em A , existe um ponto P tal que

$$\angle PAC = \angle PCB = \angle PBC = 15^\circ.$$

Então $\frac{AC}{AB}$ é igual a

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $\sqrt{6}$ (E) 3

Respostas numéricas

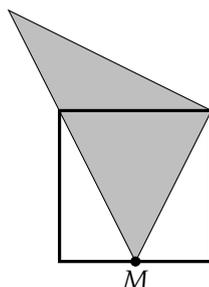
Importante: para cada problema de 11 a 15 você deve indicar um número inteiro entre 0000 e 9999 como resposta.

11. Quantos pares ordenados de inteiros (x, y) , não necessariamente positivos, satisfazem a equação $y - \frac{y}{x} = 2022$?

Resposta do problema 11:

--	--	--	--

12. Na figura, M é ponto médio do lado de um quadrado de área 36. Qual é a área do triângulo retângulo cinza?



Resposta do problema 12:

--	--	--	--

13. O polinômio $P(x)$ tem coeficientes inteiros e é tal que $P(0) = 1$ e $P(3) = 100$. Qual é o menor valor possível de $|P(10)|$?

Resposta do problema 13:

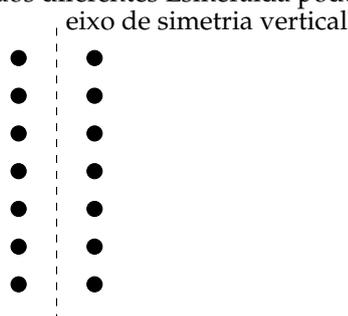
--	--	--	--

14. Jacob e Elon brincam com uma pilha de 2^n chocolates onde n é um inteiro positivo maior que 10. Inicialmente, Elon fica com 2022 desses chocolates e deixa os restantes para Jacob. Em seguida, cada um realiza o seguinte procedimento: se o número de chocolates em sua pilha for ímpar, ele pega um chocolate e guarda no seu bolso. Se o número for par, ele retira metade dos chocolates da pilha. Os chocolates retirados não são colocados no bolso e não são mais utilizados na brincadeira. Cada um repete o procedimento em sua pilha até ela acabar. Qual é o maior valor de n para o qual, ao final da brincadeira, Elon terá mais chocolates no bolso que Jacob?

Resposta do problema 14:

--	--	--	--

15. A figura a seguir apresenta 14 pontos separados em duas colunas verticais com 7 pontos em cada coluna. Esmeralda desenha sete segmentos de reta entre dois pontos na figura, de modo que cada segmento tenha uma extremidade em cada coluna. Cada ponto é extremidade de exatamente um dos sete segmentos. Dizemos que um dos desenhos de Esmeralda é *espelhado* se é simétrico em relação ao eixo de simetria vertical destacado entre as duas colunas. Quantos desenhos espelhados diferentes Esmeralda pode fazer?



Resposta do problema 15:

--	--	--	--

1ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 3 (Ensino Médio)

Nome: _____

Escola: _____

Ano: () 1º () 2º () 3º

Testes

1.	A	B	C	D	E
2.	A	B	C	D	E
3.	A	B	C	D	E
4.	A	B	C	D	E
5.	A	B	C	D	E
6.	A	B	C	D	E
7.	A	B	C	D	E
8.	A	B	C	D	E
9.	A	B	C	D	E
10.	A	B	C	D	E

Respostas numéricas

11.				
12.				
13.				
14.				
15.				

1ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 1 (6º ou 7º ano do Ensino Fundamental)

Respostas

Testes

1. D	2. A	3. C	4. A	5. B
6. C	7. E	8. B	9. C	10. C

Respostas Numéricas

Problema	11	12	13	14	15
Resposta	0009	0006	0012	6066	0040

Nível 2 (8º ou 9º ano do Ensino Fundamental)

Respostas

Testes

1. D	2. A	3. C	4. C	5. D
6. B	7. C	8. B	9. E	10. A

Respostas Numéricas

Problema	11	12	13	14	15
Resposta	0012	6066	0040	0030	0050

Nível 3 (Ensino Médio)

Respostas

Testes

1. D	2. C	3. B	4. A	5. C
6. E	7. C	8. C	9. D	10. C

Respostas Numéricas

Problema	11	12	13	14	15
Resposta	0015	0030	0019	0015	0232

1ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 1 (6º ou 7º ano do Ensino Fundamental)

Respostas

Testes

1. D	2. A	3. C	4. A	5. B
6. C	7. E	8. B	9. C	10. C

Respostas Numéricas

Problema	11	12	13	14	15
Resposta	0009	0006	0012	6066	0040

Soluções – Testes

1. Alternativa D

No período de quatro dias que consiste na quinta-feira, sexta-feira, sábado e domingo, Ronaldo deve correr. Como não corre no sábado e nem no domingo, corre na quinta-feira ou na sexta-feira. O mesmo argumento utilizado no período que consiste em sábado, domingo, segunda-feira e terça-feira mostra que Ronaldo corre na segunda-feira ou na terça-feira.

Assim, se Ronaldo corre na quarta-feira, ele corre três dias naquela semana: além da quarta-feira, uma vez na segunda-feira ou terça-feira e uma vez na quinta-feira ou sexta-feira.

Para notar que as outras alternativas estão erradas, Ronaldo pode correr toda terça-feira e sexta-feira (o que elimina as alternativas A e B) ou toda segunda-feira e quinta-feira (o que elimina as alternativas C e E).

2. Alternativa A

A área cinza corresponde a cinco quadrados inteiros e quatro metades de quadrados, ou seja, $5 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 7$ quadrados; a área branca corresponde a quatro metades de quadrados, ou seja, $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ quadrados. A razão pedida é $\frac{7}{2}$.

3. Alternativa C

Como $\frac{37}{60} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$, a soma pedida é $4 + 5 + 6 = 15$.

Observação: Uma maneira de achar os denominadores é notar que o denominador da soma é 60, que tem fatores primos 2, 3 e 5. Então dois chutes razoáveis são 3, 4 e 5, ou 4, 5 e 6.

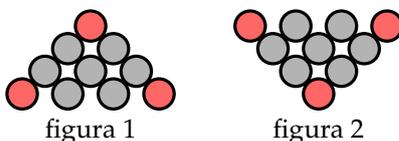
4. Alternativa A

Se ambos os avisos são falsos, não é verdade que “dentro de pelo menos uma das duas caixas há uma bola verde”. Ou seja, as duas caixas têm uma bola vermelha. Mas isso faz com que o aviso da outra caixa, “há uma bola vermelha dentro da outra caixa”, seja verdadeiro. Absurdo.

Logo ambos os avisos são verdadeiros, de modo que a caixa com o aviso “há uma bola vermelha dentro da outra caixa” indica que a primeira caixa tem uma bola vermelha e o aviso “dentro de pelo menos uma das duas caixas há uma bola verde” indica que a segunda caixa tem uma bola verde.

5. Alternativa B

A seguir, destacamos uma maneira de deslocar três moedas. Elas estão pintadas de vermelho nas duas figuras.



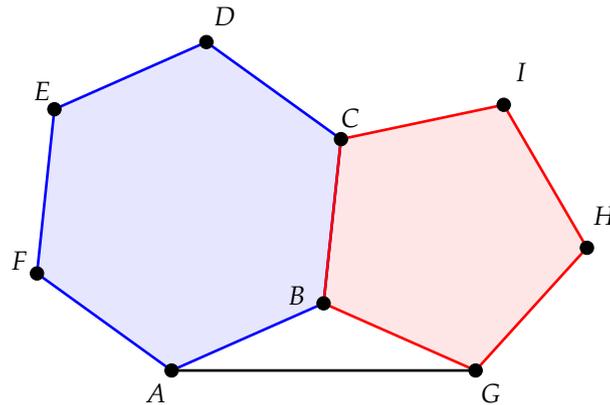
Para notar que não é possível obter a figura movendo duas ou menos moedas da figura 1, considere o que a fileira inferior da figura 1 vira na figura 2.

- Se parte dela vira uma das duas fileiras superiores da figura 2, devemos formar duas fileiras novas abaixo dessa fileira, o que envolve mover pelo menos $1 + 2 = 3$ moedas.
- Se ela vira a segunda fileira de baixo para cima, devemos remover duas de suas moedas e obter a moeda de baixo, ou seja, movemos pelo menos $2 + 1 = 3$ moedas.
- Se ela vira a fileira inferior, devemos remover pelo menos três de suas moedas.

6. Alternativa C

Os dois polígonos regulares têm o lado comum BC , logo $AB = BC = BG$, o que indica que o triângulo ABG é isósceles. Além disso,

$$\angle ABG = 360^\circ - \angle ABC - \angle CBG = 360^\circ - \frac{4 \cdot 180^\circ}{6} - \frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 360^\circ - 120^\circ - 108^\circ = 132^\circ.$$



Assim,

$$\angle BAG = \frac{180^\circ - \angle ABG}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot 132^\circ = 24^\circ.$$

7. Alternativa E

O preço que Pedro pagaria em fevereiro é $200 \cdot (1 + 0,10) \cdot (1 - 0,05)$ e o preço que pagaria em abril é $200 \cdot (1 + 0,05) \cdot (1 - 0,10)$. A diferença é

$$\begin{aligned} & 200 \cdot (1 + 0,10) \cdot (1 - 0,05) - 200 \cdot (1 + 0,05) \cdot (1 - 0,10) \\ &= 200 \cdot (1 + 0,10 - 0,05 - 0,10 \cdot 0,05 - 1 + 0,10 - 0,05 + 0,05 \cdot 0,10) \\ &= 200 \cdot 0,10 = 20 \text{ reais.} \end{aligned}$$

8. Alternativa B

Ao apertar o botão \boxed{M} , o número $x = \frac{p}{q}$ é transformado em $\frac{2p-q}{q} = 2 \cdot \frac{p}{q} - 1 = 2x - 1$. Assim, como $y = 2x - 1 \iff x = \frac{y+1}{2}$, se “voltarmos no tempo”, ao “desapertarmos” a tecla \boxed{M} voltamos de y para $\frac{y+1}{2}$. Com isso, ao “desapertar” \boxed{M} nove vezes obtemos

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \leftarrow \frac{1+1/2}{2} = \frac{3}{4} \leftarrow \frac{1+3/4}{2} = \frac{7}{8} \leftarrow \frac{1+7/8}{2} = \frac{15}{16} \leftarrow \frac{1+15/16}{2} = \frac{31}{32} \leftarrow \frac{1+31/32}{2} = \frac{63}{64} \\ \leftarrow \frac{1+63/64}{2} = \frac{127}{128} \leftarrow \frac{1+127/128}{2} = \frac{255}{256} \leftarrow \frac{1+255/256}{2} = \frac{511}{512}, \end{aligned}$$

cuja soma $N + D$ é $511 + 512 = 1023$.

9. Alternativa C

Considere o dia 3 de março.

- Até o dia 4 de abril passam $31 + 1 = 32 = 7 \cdot 4 + 4$ dias, que são 4 semanas e 4 dias.
- Até o dia 5 de maio passam $32 + 30 + 1 = 63 = 7 \cdot 9$ dias, que são 9 semanas.
- Até o dia 6 de junho passam $63 + 31 + 1 = 95 = 13 \cdot 7 + 4$ dias, que são 13 semanas e 4 dias.

- Até o dia 7 de julho passam $95 + 30 + 1 = 126 = 18 \cdot 7$ dias, que são 18 semanas.

Isso quer dizer que 3 de março, 5 de maio e 7 de julho caem no mesmo dia da semana, ou seja, no máximo um desses dias é especial. O mesmo vale para 4 de abril e 6 de junho. A diferença entre esses dois conjuntos de datas é três dias da semana a mais entre o primeiro conjunto e o segundo conjunto. Com isso, a única possibilidade de que dois dos cinco dias anteriores sejam especiais é 4 de abril e 7 de junho. Em todos os outros casos, no máximo uma data dessas cinco é especial e temos no máximo três datas especiais.

Voltando ao caso anterior, 4 de abril é uma quarta-feira e 7 de julho é um sábado. Voltando, temos que 3 de março é sábado (quatro dias da semana antes de 4 de abril).

Agora, voltando para 2 de fevereiro e 1º de janeiro, temos

- Voltando para 2 de fevereiro, retornamos $28 + 1 = 29 = 4 \cdot 7 + 1$ ou $29 + 1 = 30 = 4 \cdot 7 + 2$ dias, ou seja, 4 semanas e 1 ou 2 dias. Esse dia é quinta-feira (ano bissexto) ou sexta-feira (ano não bissexto).
- Voltando para 1º de janeiro, retornamos mais $31 + 1 = 32$ dias, ou seja, 4 semanas e 4 dias. Esse dia é domingo (ano bissexto) ou segunda-feira (ano não bissexto). Nos anos bissextos, esse dia é especial.

Com isso, no máximo 3 dias são especiais: 1/1, 4/4 e 7/7 em um ano bissexto. O próximo ano em que isso vai acontecer será 2040.

10. Alternativa C

$$\frac{2021}{148} = \frac{2021}{4 \cdot 37} = 13 + \frac{97}{148} = 13 + \frac{1}{4} + \frac{15}{37} = 13 + 0,25 + \frac{405}{999} = 13,25 + 0,405405405 \dots = 13,65540540 \dots = 13,65\overline{540}$$

Logo, como $2022 = 3 \cdot 674$, os 2022 primeiros dígitos após a vírgula são 6, 5, 673 períodos $\overline{540}$ e 5, e a soma pedida é $6 + 5 + 673 \cdot (5 + 4 + 0) + 5 = 6073$.

Soluções – Respostas numéricas

11. Resposta: 0009

Como nenhum número inteiro começa com zero, nenhum número aumentante tem zero, e cada algarismo aparece no máximo uma vez. Com isso, há nove algarismos possíveis e devemos escolher oito. Basta excluir um dos nove algarismos e colocar os demais em ordem crescente. Portanto há 9 números aumentantes com oito algarismos.

12. Resposta: 0006

Um número é múltiplo de 15 quando termina com 0 ou 5 e sua soma de algarismos é múltiplo de 3. Vimos que números aumentantes não têm zero, logo o algarismo das unidades é 5. Isso quer dizer que todos seus dígitos à esquerda são menores do que 5, e temos no máximo cinco algarismos. Podemos então listar as possibilidades.

- Cinco algarismos: a única possibilidade é 12345, que é múltiplo de 15.
- Quatro algarismos: como a soma dos cinco números de 1 a 5 é 15, devemos excluir um múltiplo de 3. A única possibilidade é excluir 3, obtendo 1245.
- Três algarismos: a soma dos dois números excluídos é múltiplo de 3, e não podemos excluir o 5 das unidades. Podemos excluir 1 e 2, ou 2 e 4, obtendo 345 ou 135.
- Dois algarismos: é mais fácil escolher quem vai com o 5 nas unidades, e vemos que só é possível termos 15 ou 45.
- Um algarismo: 5 não é múltiplo de 15.

Assim, há 6 números possíveis: 12345, 1245, 345, 135, 15 e 45.

13. Resposta: 0012

Em uma hora, ou seja, 60 minutos, o ponteiro maior dá uma volta completa (360°) e o ponteiro menor anda $\frac{1}{12} \cdot 360^\circ = 30^\circ$. Assim ao se passar um minuto, o ponteiro maior anda $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$ e o ponteiro menor anda $\frac{30^\circ}{60} = 0,5^\circ$, de modo que o ponteiro maior anda $6^\circ - 0,5^\circ = 5,5^\circ$ a mais.

Para se formar novamente um ângulo de 33° , o ponteiro maior precisa ultrapassar o menor e andar ainda 33° a mais, ou seja, deve superar o ponteiro menor em $33^\circ + 33^\circ = 66^\circ$. Como o ponteiro maior ganha $5,5^\circ$ por minuto, passa-se $\frac{66^\circ}{5,5} = 12$ minutos.

14. Resposta: 6066

O maior divisor de 5^k é 5^{k-1} e o maior divisor de um número par é sua metade. Assim, tendo 5^k na tela, ao apertar o botão três vezes obtemos $5^k - 5^{k-1} = 4 \cdot 5^{k-1}$, $4 \cdot 5^{k-1} - 2 \cdot 5^{k-1} = 2 \cdot 5^{k-1}$ e $2 \cdot 5^{k-1} - 5^{k-1} = 5^{k-1}$, ou seja, para diminuir o expoente da potência de 5 em uma unidade precisamos apertar o botão três vezes. Portanto, para diminuir o expoente de 2022 para 0 (já que $1 = 5^0$), precisamos apertar o botão $3 \cdot 2022 = 6066$ vezes.

15. Resposta: 0040

Casas vizinhas têm cores diferentes. Com isso, como temos cinco ímpares e quatro pares, e cinco casas cinzas e quatro brancas, os ímpares precisam ir em casas cinzas e os pares em casas brancas.

O número 1 pode ir na casa do centro ou uma das quatro casas do canto. Se for no centro, há 4 escolhas para se colocar o número 2 (qualquer um dos quatro vizinhos) e 2 escolhas para o número 3 (qualquer um dos dois vizinhos que sobram). Essa escolha também dita se os números ficam no sentido horário ou anti-horário, e não há mais escolhas para se fazer. Assim, nesse caso há $4 \cdot 2 = 8$ possibilidades.

Se 1 for em um dos quatro cantos, há 4 escolhas para o canto e 2 escolhas para onde colocar o 2. Feito isso, há quatro possibilidades para preencher o tabuleiro:

1	2	9
4	3	8
5	6	7

1	2	3
6	5	4
7	8	9

1	2	3
8	9	4
7	6	5

1	2	3
8	7	4
9	6	5

Assim, nesse caso há $4 \cdot 2 \cdot 4 = 32$ possibilidades, e o total de tabuleiros sinuosos é $8 + 32 = 40$.

1ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 2 (8º ou 9º ano do Ensino Fundamental)

Respostas

Testes

1. D	2. A	3. C	4. C	5. D
6. B	7. C	8. B	9. E	10. A

Respostas Numéricas

Problema	11	12	13	14	15
Resposta	0012	6066	0040	0030	0050

Soluções – Testes

1. Alternativa D

Numerando os nós intermediários de I a IV, as quantidades de anéis nos possíveis caminhos do nosso carismático tatu bola são:

- A-I-B: $3 + 4 = 7$
- A-II-I-B: $5 + 1 + 4 = 10$
- A-II-B: $5 + 3 = 8$
- A-II-III-B: $5 + 4 + 7 = 16$
- A-III-B: $9 + 4 = 13$
- A-IV-III-B: $1 + 8 + 4 = 13$
- A-IV-B: $1 + 6 = 7$

A diferença entre o maior e o menor valor é $16 - 7 = 9$.

2. Alternativa A

Ver solução do problema 4 do nível 1.

3. Alternativa C

Ver solução do problema 10 do nível 1.

4. Alternativa C

Ver solução do problema 9 do nível 1.

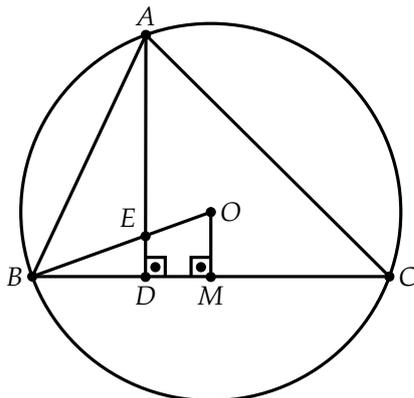
5. Alternativa D

Seja $x = 20222020$. Então

$$\begin{aligned}20222022^2 + 20222021^2 - 2 \times 20222020 \times 20222019 &= (x + 2)^2 + (x + 1)^2 - 2x(x - 1) \\ &= x^2 + 4x + 4 + x^2 + 2x + 1 - 2x^2 + 2x \\ &= 8x + 5 = 8 \cdot 20222020 + 5 = 161776165,\end{aligned}$$

cuja soma dos algarismos é $1 + 6 + 1 + 7 + 7 + 6 + 1 + 6 + 5 = 40$.

6. Alternativa B



Seja M o ponto médio de BC . Temos $OM \perp BC$, de modo que $OM \parallel DE$ e

$$\angle BED = \angle BOM = \frac{1}{2} \cdot \angle BOC = \frac{1}{2} \cdot 2\angle BAC = \angle BAC = 72^\circ.$$

Logo $\angle AEB = 180^\circ - \angle BED = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

7. Alternativa C

A quantidade de divisores positivos de $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ é $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$. Assim, como $15 = 3 \cdot 5 = (2 + 1)(3 + 1) = 14 + 1$, os números com 15 divisores são da forma $p^2 q^4$ ou p^{14} , p, q primos distintos.

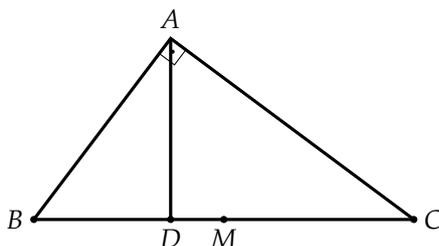
Temos $2^4 3^2 \leq p^4 q^2$ para todos p, q primos distintos e $2^4 3^2 < 2^{14}$, pois $3^2 = 9 < 2^{10}$. Assim, o menor valor possível para n é $2^4 3^2$.

Agora, considere 2^{47^2} e 2^{23^4} . Temos $2^{47^2} - 2^{23^4} = 2^2(2^{27^2} - 3^4) = 4(4 \cdot 49 - 81) > 0$ e $2^{47^2} < 2^4 \cdot 64 < 2^{14}$. Como $2^{23^4} \leq p^4 q^2$ para $p \geq 3$ e $2^{24^3} < 2^{47^2} \leq 2^4 q^2$, o segundo menor valor possível para n é 2^{23^4} e o terceiro menor valor possível para n é 2^{47^2} .

Os próximos números a serem considerados são 2^{411^2} , 3^{47^2} e 2^{27^4} . Temos $\frac{2^{411^2}}{3^{47^2}} = \frac{16 \cdot 121}{81 \cdot 49} < \frac{16 \cdot 3 \cdot 49}{80 \cdot 49} = \frac{3}{5} < 1$ e $\frac{2^{411^2}}{2^{27^4}} = \frac{2^2 \cdot 11^2}{7^4} = \frac{4 \cdot 121}{49^2} < 1$ e $2^{411^2} < 2^4 \cdot 16^2 < 2^{14}$. Logo o quarto menor valor possível para n é 2^{411^2} .

A diferença pedida é $2^{411^2} - 2^{47^2} = 2^4(11^2 - 7^2) = 2^4(11 - 7)(11 + 7) = 2^7 \cdot 9 = 9 \cdot 128 = 1152$.

8. Alternativa B



Pelo teorema de Pitágoras, $BC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Assim, $BM = \frac{BC}{2} = 5$ e, pelas relações métricas no triângulo ABC , $BD \cdot BC = AB^2 \iff BD = \frac{6^2}{10} = \frac{18}{5}$. Logo $DM = BM - BD = 5 - \frac{18}{5} = \frac{7}{5}$.

9. Alternativa E

Por soma e produto, $ab = m$, $a + b = n$, $a^2 b^2 = 2m$ e $a^2 + b^2 = 2n$. Assim, como $m = ab \neq 0$, $(ab)^2 = 2m = 2ab \iff m^2 = 2m \iff m = 2$ e, $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = n^2 - 2m = n^2 - 2 \cdot 2 = n^2 - 4$. Assim,

$$n^2 - 4 = 2n \iff n^2 - 2n - 4 = 0 \iff n = 1 \pm \sqrt{5}.$$

Agora, a e b são reais não nulos se $(a - b)^2 \geq 0 \iff (a + b)^2 \geq 4ab \iff n^2 \geq 4 \cdot 2 \iff |n| \geq 2\sqrt{2}$. Como $|1 - \sqrt{5}| < 2\sqrt{2} < 1 + \sqrt{5}$, $n = 1 + \sqrt{5}$. Verifica-se que $x^2 - (1 + \sqrt{5})x + 2 = 0$ tem soluções reais.

Com isso, $m + n = 2 + 1 + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5}$.

10. Alternativa A

Considere o quadrado 2×2 do canto superior esquerdo. Duas dessas casas precisam ser ocupadas por dominós. As possibilidades, usando \circ para dizer que a casa é ocupada por dominó e \times para dizer que não é ocupada, são

\times	\circ	
\times	\circ	

\times	\times	
\circ	\circ	

\circ	\times	
\circ	\times	

\circ	\circ	
\times	\times	

\times	\circ	
\circ	\times	

\circ	\times	
\times	\circ	

A última possibilidade não é viável, pois um dominó ocupa duas casas e ambas as casas vizinhas à casa do canto não estão ocupadas. Ao continuar a quinta possibilidade, notamos que um quadrado 2×2 tem pelo menos três casas não ocupadas, o que não é possível:

\times	\circ	\circ	
\circ	\times	\times	
\circ	\times		

Deste modo, em todo caso, ocupamos duas das casas do quadrado do canto com um dominó. Se esse dominó está na vertical, as duas primeiras linhas estão definidas:

\times	\circ								
\times	\circ								

\circ	\times								
\circ	\times								

Se o dominó está na horizontal, preenchamos as duas primeiras colunas de modo análogo.

Assim, preenchamos linha por linha ou coluna por coluna, com duas possibilidades para cada novo par de linhas ou colunas (os dominós precisam ficar todos horizontais ou todos verticais).

Como há 4 maneiras de preencher o primeiro canto e 2 maneiras para preencher cada um dos próximos quatro pares de filas, há $4 \cdot 2^4 = 64$ possibilidades de preenchimento.

Soluções – Respostas numéricas

11. Resposta: 0012

Veja a solução do problema 13 do nível 1.

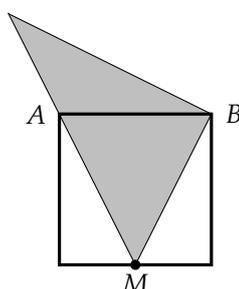
12. Resposta: 6066

Veja a solução do problema 14 do nível 1.

13. Resposta: 0040

Veja a solução do problema 15 do nível 1.

14. Resposta: 0030



O triângulo ABM tem área $\frac{AB \cdot d(M, AB)}{2} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18$ e $AM = BM = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$. Sendo h a altura do triângulo relativa a BM , $\frac{BM \cdot h}{2} = 18 \iff h = \frac{36}{BM} = \frac{36}{3\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$.

Logo $\sin \angle AMB = \frac{h}{AM} = \frac{12/\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$, de modo que o triângulo retângulo sombreado é o triângulo 3-4-5 com catetos $BM = 3\sqrt{5}$ e $4\sqrt{5}$. Sua área é $\frac{3\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{2} = 30$.

15. Resposta: 0050

Sabemos que $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = t \iff t \leq \sqrt{k} < t+1 \iff t^2 \leq k < (t+1)^2$. Como há $(t+1)^2 - t^2 = 2t+1$ números dentro desse intervalo,

$$\lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \dots + \lfloor \sqrt{n} \rfloor = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + \dots + (2t-1)(t-1) + (n-t^2+1) \cdot t,$$

em que $t = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

Como $\sum_{k=1}^m (2k+1)k = \sum_{k=1}^m 2k^2 + k = 2 \cdot \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m(m+1)(4m+5)}{6}$, usando esse fato para $m = t-1$,

$$\lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \dots + \lfloor \sqrt{n} \rfloor = \frac{(t-1)t(4t+1)}{6} + (n-t^2+1) \cdot t.$$

Temos $\frac{6 \cdot 7 \cdot 29}{6} = 7 \cdot 29 = 203$ e $\frac{7 \cdot 8 \cdot 33}{6} = 7 \cdot 4 \cdot 11 = 308$, $t = 7$, de modo que

$$\lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \dots + \lfloor \sqrt{n} \rfloor = 217 \iff 203 + (n-48) \cdot 7 = 217 \iff n = 50.$$

Observação: É claro que é possível calcular diretamente sem achar a fórmula fechada para a soma: sendo $S_n = \lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \dots + \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, calcula-se usando as parcelas S_n para $n = 3, 8, \dots, 7^2 - 1 = 48$ e adiciona-se 7 mais duas vezes:

n	3	8	15	24	35	48
S_n	3	$3 + 2 \cdot 5 = 13$	$13 + 3 \cdot 7 = 34$	$34 + 4 \cdot 9 = 70$	$70 + 5 \cdot 11 = 125$	$125 + 6 \cdot 13 = 203$

Com isso, $S_{49} = 203 + 7 = 210$ e $S_{50} = 210 + 7 = 217$.

1ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 3 (Ensino Médio)

Respostas

Testes

1. D	2. C	3. B	4. A	5. C
6. E	7. C	8. C	9. D	10. C

Respostas Numéricas

Problema	11	12	13	14	15
Resposta	0015	0030	0019	0015	0232

Soluções – Testes

1. Alternativa D

Veja a solução do problema 1 do nível 1.

2. Alternativa C

Veja a solução do problema 9 do nível 1.

3. Alternativa B

Veja a solução do problema 6 do nível 2.

4. Alternativa A

Note que f é uma função que admite a inversa g tal que $x = 2g(x) - 1 \iff g(x) = \frac{x+1}{2}$. Assim, $f(f(\dots f(x)\dots)) = 0 \iff x = g(g(\dots g(x)\dots))$, em que g é aplicada o mesmo número de vezes que f , ou seja, 2022 vezes.

Observamos que $g(0) = \frac{1}{2}$, $g(g(0)) = \frac{1+1/2}{2} = \frac{3}{4}$ e $g(g(g(0))) = \frac{1+3/4}{2} = \frac{7}{8}$, o que sugere que $g(g(\dots g(0)\dots)) = 1 - \frac{1}{2^k}$, em que g é aplicada k vezes.

Isso é provado por uma indução: aplicando g a $1 - \frac{1}{2^k}$ obtemos $g\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = \frac{1+1-\frac{1}{2^k}}{2} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$, o que conclui nossa indução. Logo $x = 1 - \frac{1}{2^{2022}}$.

5. Alternativa C

A formiga precisa ir 3 vezes para três sentidos diferentes (as três dimensões do cubo). Simbolizando ir nos sentidos por A , B e C , a quantidade é o número de anagramas de $AAABBBCCC$, que são $\frac{9!}{3!3!3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 6} = 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 1680$.

6. Alternativa E

Veja a solução do problema 9 do nível 2.

7. Alternativa C

Podemos fixar qualquer um dos pontos médios das arestas. Cada aresta tem quatro arestas adjacentes (com um vértice comum), quatro arestas reversas, uma aresta oposta e duas arestas paralelas na mesma face. Com isso, pela simetria, há quatro ângulos diferentes que podem ser obtidos. Pode-se verificar que esses ângulos medem 60° (adjacentes), 120° (reversas), 180° (opostas) ou 90° (paralelas na mesma face).

8. Alternativa C

Pela fórmula de Heron, a área de um triângulo de lados \sqrt{a} , \sqrt{b} e \sqrt{c} é

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{2}\right)\left(\frac{-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}}{2}\right)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - a}{4}\right)\left(\frac{a - (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2}{4}\right)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{b + c - a + 2\sqrt{bc}}{4}\right)\left(\frac{-b - c + a + 2\sqrt{bc}}{4}\right)} = \sqrt{\frac{4bc - (b + c - a)^2}{16}} \end{aligned}$$

Para $a = 1$, $b = 2$ e $c = 5$, obtemos como área

$$\sqrt{\frac{4 \cdot 2 \cdot 5 - (2 + 5 - 1)^2}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2},$$

de modo que um triângulo de lados $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ é manhoso.

Como $a + b + c \geq 1 + 2 + 3 = 6$, há outros dois triângulos possíveis com soma $a + b + c$ menor do que $1 + 2 + 5 = 8$: o triângulo de lados $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, que tem área $\sqrt{\frac{4 \cdot 2 \cdot 3 - (2 + 3 - 1)^2}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e o triângulo de lados $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{4}$, que tem área $\sqrt{\frac{4 \cdot 2 \cdot 4 - (2 + 4 - 1)^2}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Essas áreas não são números racionais, de modo que o menor valor para a soma $a + b + c$ é 8.

9. Alternativa D

Um conjunto espetacular com 8 elementos é $\{1, 4, 6, 9, 11, 14, 16, 19\}$, que tem quatro números que deixam resto 1 e quatro que deixam resto 4 na divisão por 5; as possíveis somas módulo 5 são, então, $1 + 1 + 1 \equiv 3 \pmod{5}$, $1 + 1 + 4 \equiv 1 \pmod{5}$, $1 + 4 + 4 \equiv 4 \pmod{5}$ e $4 + 4 + 4 \equiv 2 \pmod{5}$.

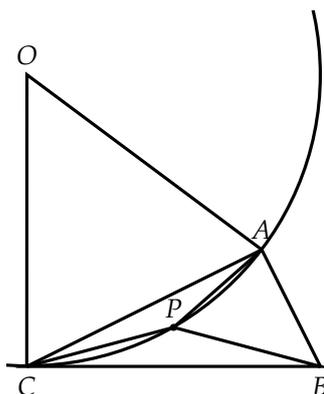
Suponha que um subconjunto $S \subset \{1, 2, \dots, 20\}$ tenha nove ou mais elementos. Assim, como há no máximo 4 elementos para cada resto na divisão por 5, há pelo menos três restos diferentes. Se um deles é 0, pode-se escolher no máximo um dos restos 1 ou 4 e no máximo um dos restos 2 ou 3, ou seja, há exatamente três restos distintos. Há no máximo dois números que deixam resto 0, de modo que há pelo menos $9 - 2 = 7$ nos outros dois restos, ou seja, há quatro de um resto e três do outro. Multiplicando todos os números por um valor conveniente, podemos supor que o resto 1 aparece quatro vezes, de modo que o outro resto, que aparece pelo menos 3 vezes, é 2 ou 3. Mas $1 + 1 + 3 \equiv 0 \pmod{5}$ e $1 + 2 + 2 \equiv 0 \pmod{5}$, de modo que esse caso não é possível.

Assim, não aparece múltiplo de 5, e só temos quatro restos disponíveis (1 a 4). Um desses restos, que novamente podemos supor que é 1, aparece pelo menos três vezes. Isso faz com que tenhamos nenhum 3 (pois $3 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$). Assim, os restos que aparecem são 1, 2 e 4. Há no máximo um 2 (pois $2 + 2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$), logo há quatro restos 1, um resto 2 e quatro restos 4. Mas aí $4 + 4 + 2 \equiv 0 \pmod{5}$. Novamente, não é possível.

Logo a quantidade máxima de elementos de um subconjunto espetacular de $\{1, 2, \dots, 20\}$ é 8.

10. Alternativa C

Observando que $\angle PAC = \angle PCB$, construa o circuncírculo de APC , que é tangente a BC .



Seja R o raio desse círculo. Então, da tangência, $\angle AOC = 2\angle ACB$, de modo que

$$AC = 2R \operatorname{sen} \angle ACB = 2R \cdot \frac{AB}{BC} \implies \frac{AC}{AB} = \frac{2R}{BC}.$$

Finalmente, no triângulo PCB , $BC = 2PC \cos 15^\circ$ e, pela lei dos senos, $PC = 2R \operatorname{sen} \angle PAC = 2R \operatorname{sen} 15^\circ$. Portanto $BC = 2 \cdot 2R \operatorname{sen} 15^\circ \cos 15^\circ = 2R \operatorname{sen} 30^\circ = R$.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{2R}{BC} = \frac{2R}{R} = 2.$$

Soluções – Respostas numéricas

11. Resposta: 0015

Temos que $\frac{y}{x} = y - 2022$ é inteiro. Assim, $y = kx$, $x \neq 0$ e k inteiro, e obtemos

$$kx - k = 2022 \iff (x - 1)k = 2022.$$

Assim, k é divisor de $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$, que tem $2(1+1)(1+1)(1+1) = 16$ divisores (incluindo negativos). Temos $x - 1 = \frac{2022}{k}$, e a única possibilidade que não serve é $x = 0$ (pois x está no denominador na equação original), o que ocorre para $k = -2022$.

Logo a equação tem $16 - 1 = 15$ soluções (x, y) inteiras.

12. Resposta: 0030

Veja a solução do problema 14 do nível 2.

13. Resposta: 0019

Para obter um polinômio que satisfaz $P(0) = 1$ e $P(3) = 100$, considere $Q(x) = P(x) - 33x - 1$, obtido subtraindo de P a equação da reta que passa por $(0, 1)$ e $(3, 100)$. Temos $Q(0) = Q(3) = 0$, de modo que $Q(x) = x(x-3)R(x)$, ou seja, $P(x) = x(x-3)R(x) + 33x + 1$, em que $R(x)$ tem coeficientes inteiros. Nesse caso, $P(10) = 10 \cdot 7R(10) + 331 = 70(R(10) + 5) - 19$, cujo menor valor em valor absoluto é 19. Fazendo $R(x) = -5$, obtemos um polinômio $P(x) = -5x(x-3) + 33x + 1$ válido.

14. Resposta: 0015

Cada pessoa retira de sua pilha independentemente. Sendo N a quantidade de chocolates na pilha, se N é ímpar a quantidade de chocolates no bolso aumenta em 1 e a pilha tem $N - 1$ chocolates e se N é par, a quantidade de chocolates na pilha muda para $N/2$.

Vendo na base 2, se N termina em 1 a quantidade de chocolates no bolso aumenta em 1 e a quantidade de chocolates na pilha é obtida trocando o 1 das unidades por 0. Se N termina em 0, a quantidade de chocolates no bolso não muda e a quantidade de chocolates na pilha, $N/2$, é obtida “cortando” o 0 das unidades. Com isso, a quantidade de chocolates é igual ao número de dígitos 1 na base 2 da quantidade inicial de chocolates na pilha.

Assim, como $2022 = 11111100110_2$, Elon sempre obtém 8 chocolates. Agora, para $n > 10$, $2^n - 2022 = 1000\dots 00_2 - 11111100110_2 = 111\dots 00000011010_2$, em que há $n - 11$ uns à esquerda. O total de chocolates de Jacob é igual a $n - 11 + 3 = n - 8$. Essa quantidade é menor do que a de Elon quando $n - 8 \leq 7 \iff n \leq 15$. O maior valor de n é 15.

15. Resposta: 0232

Numere as linhas de 1 a 7. Se Esmeralda liga o ponto da linha i na esquerda ao ponto da linha j na direita, ela deve ligar o ponto da linha j na esquerda ao ponto da linha i na direita. O problema é então equivalente a particionar o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ em conjuntos de 1 ou 2 elementos. Dividimos nos seguintes casos:

- Nenhum conjunto de dois elementos: só há 1 possibilidade.
- Um conjunto de dois elementos: há $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ possibilidades.
- Dois conjuntos de dois elementos: escolhemos os quatro números a, b, c, d envolvidos de $\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$ maneiras e depois escolhemos o outro elemento x de $\{a, x\}$ de 3 maneiras, e há $35 \cdot 3 = 105$ possibilidades.
- Três conjuntos de dois elementos: escolhemos o que não está envolvido nesses conjuntos de 7 maneiras. Sendo a, b, c, d, e, f os números, escolhemos o “parceiro” de a de 5 maneiras e o “parceiro” do menor número que sobrou de 3 maneiras (tiramos 3 antes). Há $7 \cdot 5 \cdot 3 = 105$ possibilidades.

O total de desenhos que Esmeralda pode fazer é, então, $1 + 21 + 105 + 105 = 232$.