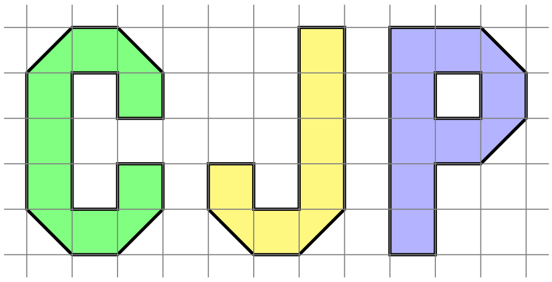
2ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 1 (6º ou 7º ano do Ensino Fundamental)

Testes

Importante: cada problema de 1 a 15 possui uma única alternativa como resposta.

1. Na figura a seguir, cada quadradinho tem área 1 cm^2.



Determine a soma das áreas da letras C, J e P desenhadas, em cm^2.

(A) 25 (B) 25,5 (C) 26 (D) 26,5 (E) 27

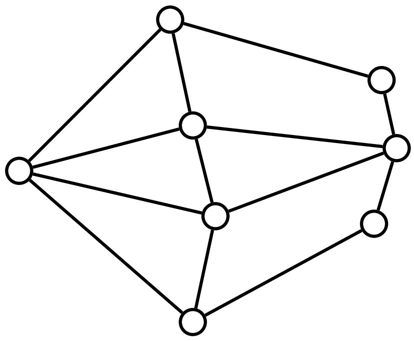
---

2. Ana foi à feira com 20 reais, comprou 3 bananas e 2 peras e recebeu certo valor de troco. Mais tarde, seu irmão João foi ao mesmo local com 29 reais, comprou 5 bananas e 3 peras e também recebeu troco. Depois Maria, mãe de João e Ana, comprou mais uma banana e uma pera. Sabendo que Ana, João e Maria receberam a mesma quantia de troco, quantos reais Maria levou para a feira?

(A) 9 (B) 11 (C) 13 (D) 15 (E) 17

---

3. Qual é o número mínimo de cores necessárias para colorir as bolinhas da figura abaixo de modo que bolinhas ligadas por um segmento tenham cores distintas?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

---

4. Regis vai comprar uma capinha personalizada de celular na internet. A capinha custa 100 reais, o frete custa 20 reais e a personalização custa 30 reais. Regis possui dois cupons de desconto, mas só pode usar um deles. O primeiro dá frete grátis e o segundo dá desconto de 20% no total da compra (capinha, frete e personalização). Se Regis usar o cupom no qual paga o menor valor possível, quanto Regis vai pagar em reais?

(A) 110 (B) 115 (C) 120 (D) 125 (E) 130

---

5. José escreveu no quadro a igualdade

$$2^n + 2^n + \cdots + 2^n = 15360.$$

Maria percebeu que havia $2m + 1$ parcelas iguais a 2^n no lado esquerdo, sendo m um número inteiro. Quanto vale $m + n$?

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

---

6. O professor Paulo almoça todos os dias num restaurante cuja refeição custa 10 reais. O gerente decidiu dar um desconto de 10% para cada almoço e além disso deu cartões nos quais Paulo poderia juntar carimbos. Após cada almoço que Paulo pagava, ele recebia 1 carimbo e ao completar 9 carimbos o almoço seguinte sairia de graça. No dia do almoço de graça Paulo não recebia carimbo. Comparando o valor total em 100 dias com desconto e carimbos com o valor total em 100 dias sem desconto e sem carimbos, qual é o desconto total que Paulo ganhou em porcentagem?

(A) 12% (B) 15% (C) 18% (D) 19% (E) 20%

---

7. José preencheu um tabuleiro 3×3 com os números de 1 a 9 e notou que a soma dos números em k filas (linha ou coluna) era ímpar. Quantos são os possíveis valores para k?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

---

8. Um número inteiro positivo A é dito *bombado* quando **não** existe um inteiro positivo menor que A com soma dos algarismos maior que a soma dos algarismos de A. Existem quantos inteiros positivos bombados de dois algarismos?

(A) 9 (B) 10 (C) 15 (D) 16 (E) 18

---

9. De quantas maneiras podemos pintar as letras da palavra JACOB se as vogais devem ser coloridas de azul ou vermelho e as consoantes devem ser coloridas de azul ou verde e além disso não podemos ter letras adjacentes com a mesma cor?

(A) 13 (B) 19 (C) 22 (D) 24 (E) 32

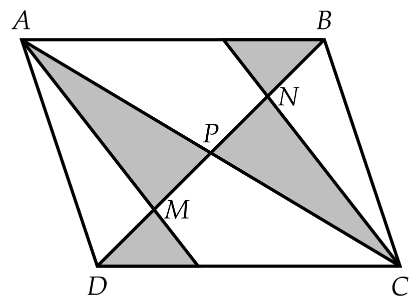
---

10. O número de seis algarismos $N = (2aaaa6)$ é divisível por 24. A soma dos algarismos de N é

(A) 12 (B) 16 (C) 24 (D) 32 (E) 36

---

11. Na figura a seguir, $ABCD$ é um paralelogramo. Os pontos M e N são pontos médios de DP e BP, respectivamente. Se a área do paralelogramo $ABCD$ é 24, qual é a área da região sombreada?



(A) 6 (B) 8 (C) 12 (D) 14 (E) 16

---

12. As letras O, B, M, J e P representam algarismos distintos. Sabendo que

$$OBM + OBM = JP \cdot JP,$$

O valor de $O + B + M + J + P$ é

(A) 15 (B) 20 (C) 24 (D) 27 (E) 32

---

13. Um icosaedro regular é um sólido com vinte faces, todas sendo triângulos equiláteros:

A figura mostra uma projeção ortogonal do icosaedro no plano do papel, com seis vértices. No máximo quantos vértices uma projeção ortogonal do icosaedro em um plano pode ter?

(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 12

14. Qual é o maior valor de n para o qual é possível colocar n inteiros positivos distintos, todos menores ou iguais a 20, em círculo de modo que quaisquer dois números vizinhos tenham mdc maior do que 1?

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

15. Considere que n times de futebol jogam exatamente uma vez contra cada um dos outros $n-1$ times. Em cada partida, o time vencedor ganha 3 pontos e o time perdedor não ganha pontos; em caso de empate, cada time ganha 1 ponto. Os pontos são somados. Ao fim do campeonato, ordenamos os times em ordem decrescente de pontos.

Para $n = 3$, há sete possibilidades de pontuações dos três times: $(6;3;0)$, $(6;1;1)$, $(4;4;0)$, $(4;3;1)$, $(4;2;1)$, $(3;3;3)$ e $(2;2;2)$.

Para $n = 4$, há quantas possibilidades de pontuações dos quatro times?

(A) 24 (B) 28 (C) 32 (D) 35 (E) 40

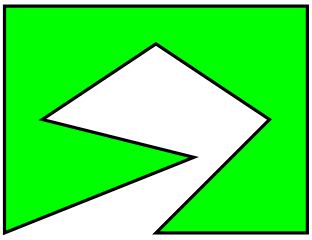
Respostas numéricas

Importante: para cada problema de 16 a 20 você deve indicar um número inteiro entre 0000 e 9999 como resposta.

16. Qual é a menor diferença possível entre um número com 4 algarismos todos distintos e um número com 3 algarismos todos distintos?

Resposta do problema 16:

17. João desenhou o seguinte polígono que lembra a parte verde da bandeira do Brasil. Qual é a soma dos ângulos internos, em graus, deste polígono?



Observação: você pode querer utilizar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Resposta do problema 17:

18. Um número é chamado de *perfeitoso* quando nenhum dos seus algarismos é zero e a soma dos seus algarismos é um quadrado perfeito. Por exemplo, 97, 112 e 1111 são números perfeitosos com 2, 3 e 4 algarismos, respectivamente. Luiz escreveu todos os números perfeitosos de 2023 algarismos. Existem quantos valores possíveis para a soma dos algarismos dos números na lista que Luiz escreveu?

Resposta do problema 18:

19. Quantos números de dois algarismos são divisíveis pela soma dos seus algarismos?

Resposta do problema 19:

20. De quantos modos podemos colorir um tabuleiro 2×8 de modo que cada quadrado unitário seja verde ou amarelo e cada quadrado 2×2 possua três quadrados unitários de uma cor e o outro quadrado unitário da outra cor?

Resposta do problema 20:

2ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 1 (6º ou 7º ano do Ensino Fundamental)

Nome: ____

Escola: ____

Ano: (   ) 6º   (   ) 7º

Testes

1.	A	B	C	D	E
2.	A	B	C	D	E
3.	A	B	C	D	E
4.	A	B	C	D	E
5.	A	B	C	D	E
6.	A	B	C	D	E
7.	A	B	C	D	E
8.	A	B	C	D	E
9.	A	B	C	D	E
10.	A	B	C	D	E
11.	A	B	C	D	E
12.	A	B	C	D	E
13.	A	B	C	D	E
14.	A	B	C	D	E
15.	A	B	C	D	E

Respostas numéricas

16.				
17.				
18.				
19.				
20.				

2ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 2 (8º ou 9º ano do Ensino Fundamental)

Testes

Importante: cada problema de 1 a 15 possui uma única alternativa como resposta.

1. Ana foi à feira com 20 reais, comprou 3 bananas e 2 peras e recebeu certo valor de troco. Mais tarde, seu irmão João foi ao mesmo local com 29 reais, comprou 5 bananas e 3 peras e também recebeu troco. Depois Maria, mãe de João e Ana, comprou mais uma banana e uma pera. Sabendo que Ana, João e Maria receberam a mesma quantia de troco, quantos reais Maria levou para a feira?

(A) 9 (B) 11 (C) 13 (D) 15 (E) 17

---

2. Regis vai comprar uma capinha personalizada de celular na internet. A capinha custa 100 reais, o frete custa 20 reais e a personalização custa 30 reais. Regis possui dois cupons de desconto, mas só pode usar um deles. O primeiro dá frete grátis e o segundo dá desconto de 20% no total da compra (capinha, frete e personalização). Se Regis usar o cupom no qual paga o menor valor possível, quanto Regis vai pagar em reais?

(A) 110 (B) 115 (C) 120 (D) 125 (E) 130

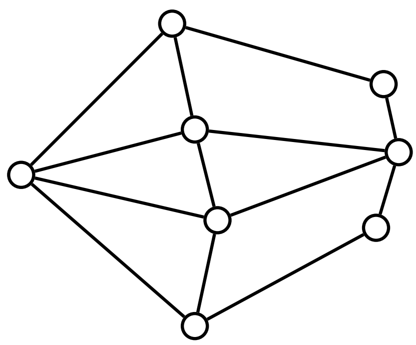
---

3. José preencheu um tabuleiro 3×3 com os números de 1 a 9 e notou que a soma dos números em k filas (linha ou coluna) era ímpar. Quantos são os possíveis valores para k?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

---

4. Qual é o número mínimo de cores necessárias para colorir as bolinhas da figura abaixo de modo que bolinhas ligadas por um segmento tenham cores distintas?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

---

5. José escreveu no quadro a igualdade

$$2^n + 2^n + \cdots + 2^n = 15360.$$

Maria percebeu que havia $2m + 1$ parcelas iguais a 2^n no lado esquerdo, sendo m um número inteiro. Quanto vale $m + n$?

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

---

6. O número de seis algarismos $N = (2aaaa6)$ é divisível por 24. A soma dos algarismos de N é

(A) 12 (B) 16 (C) 24 (D) 32 (E) 36

---

7. Sendo x e y reais tais que

$$\frac{x + 1^2}{y + 1} = \frac{x + 2^2}{y + 2} = k,$$

quanto vale k?

(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 9

---

8. De quantas maneiras podemos pintar as letras da palavra JACOB se as vogais devem ser coloridas de azul ou vermelho e as consoantes devem ser coloridas de azul ou verde e além disso não podemos ter letras adjacentes com a mesma cor?

(A) 13 (B) 19 (C) 22 (D) 24 (E) 32

---

9. As letras O, B, M, J e P representam algarismos distintos. Sabendo que

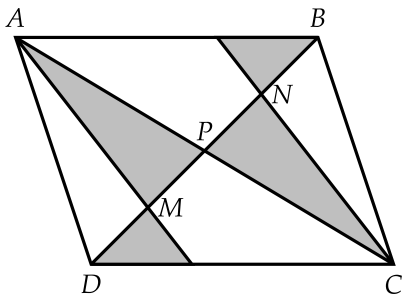
$$OBM + OBM = JP \cdot JP,$$

O valor de $O + B + M + J + P$ é

(A) 15 (B) 20 (C) 24 (D) 27 (E) 32

---

10. Na figura a seguir, $ABCD$ é um paralelogramo. Os pontos M e N são pontos médios de DP e BP, respectivamente. Se a área do paralelogramo $ABCD$ é 24, qual é a área da região sombreada?



(A) 6 (B) 8 (C) 12 (D) 14 (E) 16

---

11. Seja X um subconjunto de $\{1, 2, \ldots, 2023\}$ (conjunto dos inteiros de 1 até 2023) tal que se a e b pertencem a X, então $a + b$ não é múltiplo de 3. Qual é o maior valor possível para a quantidade de elementos de X?

(A) 674 (B) 676 (C) 720 (D) 1011 (E) 1012

---

12. O número

$$\sqrt{2022^2 + 2023^2 + (2022 \cdot 2023)^2} + \sqrt{2023^2 + 2024^2 + (2023 \cdot 2024)^2}$$

é

(A) irracional

(B) inteiro e múltiplo de 3

(C) inteiro e múltiplo de 5

(D) inteiro e múltiplo de 8

(E) primo

---

13. No triângulo acutângulo ABC, AH é altura, com H sobre o lado BC. Sejam P e Q as projeções de H em AB e AC, respectivamente. Sabendo que $\angle ABC - \angle ACB = 20°$. Qual é a medida do ângulo agudo determinado pelas retas PQ e AH?

(A) 30° (B) 45° (C) 65° (D) 70° (E) 80°

---

14. Sejam a e b números reais. As raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$ são r e s e as raízes da equação $x^2 - (b + 3)x + (a + 3) = 0$ são $\frac{1}{r}$ e $\frac{1}{s}$. Então $(b + 1)^3$ é igual a

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

---

15. Considere que n times de futebol jogam exatamente uma vez contra cada um dos outros $n-1$ times. Em cada partida, o time vencedor ganha 3 pontos e o time perdedor não ganha pontos; em caso de empate, cada time ganha 1 ponto. Os pontos são somados. Ao fim do campeonato, ordenamos os times em ordem decrescente de pontos.

Para $n = 3$, há sete possibilidades de pontuações dos três times: $(6;3;0)$, $(6;1;1)$, $(4;4;0)$, $(4;3;1)$, $(4;2;1)$, $(3;3;3)$ e $(2;2;2)$.

Para $n = 4$, há quantas possibilidades de pontuações dos quatro times?

(A) 24 (B) 28 (C) 32 (D) 35 (E) 40

Respostas numéricas

Importante: para cada problema de 16 a 20 você deve indicar um número inteiro entre 0000 e 9999 como resposta.

16. Se a e b são inteiros positivos tais que $\text{mdc}(a, b) = 6$ e $\text{mmc}(a, b) = 36a^2$, quanto vale $a + b$?

Resposta do problema 16:

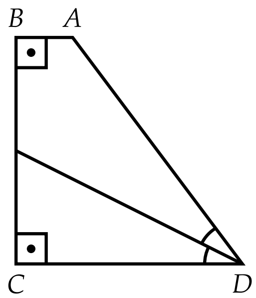
---

17. De quantos modos podemos colorir um tabuleiro 2×8 de modo que cada quadrado unitário seja verde ou amarelo e cada quadrado 2×2 possua três quadrados unitários de uma cor e o outro quadrado unitário da outra cor?

Resposta do problema 17:

---

18. No trapézio retângulo $ABCD$, com $\angle ABC = \angle BCD = 90°$, a base AB mede 104 e a base CD mede 234. Sabendo que a bissetriz do ângulo D intersecta BC no seu ponto médio, determine a medida do lado BC.



Resposta do problema 18:

---

19. Um número é chamado de *perfeitoso* quando nenhum dos seus algarismos é zero e a soma dos seus algarismos é um quadrado perfeito. Por exemplo, 97, 112 e 1111 são números perfeitosos com 2, 3 e 4 algarismos, respectivamente. Luiz escreveu todos os números perfeitosos de 2023 algarismos. Existem quantos valores possíveis para a soma dos algarismos dos números na lista que Luiz escreveu?

Resposta do problema 19:

---

20. A *sequência de Fibonacci* é uma sequência em que cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos imediatamente anteriores, sendo os dois termos iniciais iguais a 1. Então, os primeiros termos da sequência são:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Dentre os 100 primeiros termos da sequência, quantos são múltiplos de 3 **ou** 4?

Resposta do problema 20:

2ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 2 (8º ou 9º ano do Ensino Fundamental)

Nome: ______________________________

Escola: ______________________________

Ano: (   ) 8º   (   ) 9º

Testes

1.	A	B	C	D	E
2.	A	B	C	D	E
3.	A	B	C	D	E
4.	A	B	C	D	E
5.	A	B	C	D	E
6.	A	B	C	D	E
7.	A	B	C	D	E
8.	A	B	C	D	E
9.	A	B	C	D	E
10.	A	B	C	D	E
11.	A	B	C	D	E
12.	A	B	C	D	E
13.	A	B	C	D	E
14.	A	B	C	D	E
15.	A	B	C	D	E

Respostas numéricas

16.				
17.				
18.				
19.				
20.				

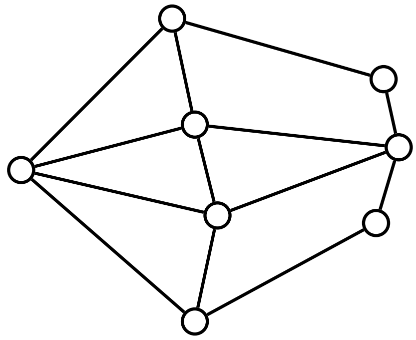
2ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 3 (Ensino Médio)

Testes

Importante: cada problema de 1 a 15 possui uma única alternativa como resposta.

1. Qual é o número mínimo de cores necessárias para colorir as bolinhas da figura abaixo de modo que bolinhas ligadas por um segmento tenham cores distintas?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

---

2. Um icosaedro regular é um sólido com vinte faces, todas sendo triângulos equiláteros:

A figura mostra uma projeção ortogonal do icosaedro no plano do papel, com seis vértices. No máximo quantos vértices uma projeção ortogonal do icosaedro em um plano pode ter?

(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 12

---

3. A sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ é definida por $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ e $a_n^2 + a_{n-1}a_{n+1} = 1$ para $n \geq 2$. O valor de a_{2023} é

(A) 2023 (B) -2023 (C) 2022 (D) -2022 (E) 2024

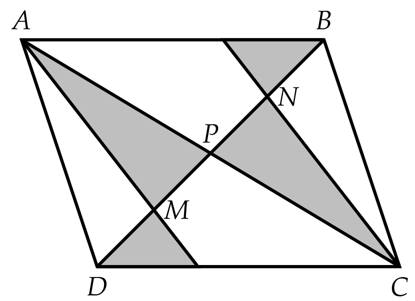
---

4. Qual é o maior valor de n para o qual é possível colocar n inteiros positivos distintos, todos menores ou iguais a 20, em círculo de modo que quaisquer dois números vizinhos tenham mdc maior do que 1?

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

---

5. Na figura a seguir, $ABCD$ é um paralelogramo. Os pontos M e N são pontos médios de DP e BP, respectivamente. Se a área do paralelogramo $ABCD$ é 24, qual é a área da região sombreada?



(A) 6 (B) 8 (C) 12 (D) 14 (E) 16

6. De quantas maneiras podemos pintar as letras da palavra JACOB se as vogais devem ser coloridas de azul ou vermelho e as consoantes devem ser coloridas de azul ou verde e além disso não podemos ter letras adjacentes com a mesma cor?

(A) 13 (B) 19 (C) 22 (D) 24 (E) 32

7. O número $\sqrt{2022^2 + 2023^2 + (2022 \cdot 2023)^2} + \sqrt{2023^2 + 2024^2 + (2023 \cdot 2024)^2}$ é

(A) irracional

(B) inteiro múltiplo de 3

(C) inteiro múltiplo de 5

(D) inteiro múltiplo de 8

(E) primo

8. O tamanho do período de uma dízima periódica é a quantidade de dígitos em seu período, contando repetições. Por exemplo, $\frac{1}{101} = 0{,}00990099\ldots = 0{,}\overline{0099}$ tem período de tamanho 4. O menor valor do inteiro positivo N para o qual a dízima periódica gerada por $\frac{1}{N}$ tem período de tamanho 5 é

(A) 23 (B) 31 (C) 37 (D) 41 (E) 271

9. Os números reais a, b, c têm soma igual a zero. Então $\dfrac{a}{(bc-a^2)^3} + \dfrac{b}{(ca-b^2)^3} + \dfrac{c}{(ab-c^2)^3}$ é igual a

(A) 0 (B) $ab+bc+ca$ (C) $a^2+b^2+c^2$ (D) abc (E) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

10. Um campeonato tem oito times: dois do estado de São Paulo, dois do estado do Rio de Janeiro, dois de Minas Gerais e dois do Rio Grande do Sul. Uma rodada consiste em quatro jogos, cada um com dois dos oito times, sendo que cada time participa de exatamente um jogo. Os pares de times são sorteados ao acaso. Qual é a probabilidade de que todo time jogue contra um time de outro estado?

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{2}{7}$ (C) $\dfrac{3}{7}$ (D) $\dfrac{4}{7}$ (E) $\dfrac{5}{7}$

11. O triângulo ABC é retângulo em A. O círculo ω tangencia os lados AB e AC e, internamente, o circuncírculo Ω de ABC. Sabendo que a reta que liga os centros de ω e Ω é perpendicular a AC, a razão $AB : AC : BC$ é

(A) $1 : 1 : \sqrt{2}$ (B) $1 : \sqrt{3} : 2$ (C) $1 : 2\sqrt{2} : 3$ (D) $3 : 4 : 5$ (E) $5 : 12 : 13$

12. Os números inteiros positivos a, b, c, x são tais que $ax^2 + bx + c = 2023$. O menor valor possível de $a+b+c$ é

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 2023

13. Sejam a e b números reais. As raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$ são r e s e as raízes da equação $x^2 - (b+3)x + (a+3) = 0$ são $\dfrac{1}{r}$ e $\dfrac{1}{s}$. Então $(b+1)^3$ é igual a

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

14. Considere que n times de futebol jogam exatamente uma vez contra cada um dos outros $n-1$ times. Em cada partida, o time vencedor ganha 3 pontos e o time perdedor não ganha pontos; em caso de empate, cada time ganha 1 ponto. Os pontos são somados. Ao fim do campeonato, ordenamos os times em ordem decrescente de pontos.

Para $n = 3$, há sete possibilidades de pontuações dos três times: $(6;3;0)$, $(6;1;1)$, $(4;4;0)$, $(4;3;1)$, $(4;2;1)$, $(3;3;3)$ e $(2;2;2)$.

Para $n = 4$, há quantas possibilidades de pontuações dos quatro times?

(A) 24 (B) 28 (C) 32 (D) 35 (E) 40

15. Sendo O e I o circuncentro e o incentro, respectivamente, do triângulo escaleno acutângulo ABC, sabe-se que O está no interior do triângulo AIC e $\angle OIC = \angle BAI$. Então um dos ângulos internos do triângulo ABC mede

(A) 15° (B) 30° (C) 45° (D) 60° (E) 75°

Respostas numéricas

Importante: para cada problema de 16 a 20 você deve indicar um número inteiro entre 0000 e 9999 como resposta.

16. Um número é chamado de *perfeitoso* quando nenhum dos seus algarismos é zero e a soma dos seus algarismos é um quadrado perfeito. Por exemplo, 97, 112 e 1111 são números perfeitosos com 2, 3 e 4 algarismos, respectivamente. Luiz escreveu todos os números perfeitosos de 2023 algarismos. Existem quantos valores possíveis para a soma dos algarismos dos números na lista que Luiz escreveu?

Resposta do problema 16: | | | | |

---

17. De quantos modos podemos colorir um tabuleiro 2×8 de modo que cada quadrado unitário seja verde ou amarelo e cada quadrado 2×2 possua três quadrados unitários de uma cor e o outro quadrado unitário da outra cor?

Resposta do problema 17: | | | | |

---

18. Esmeralda desenha um polígono convexo P de 2023 vértices e um polígono convexo Q de 1000 vértices. Ela pinta de verde todos os pontos de interseção de um lado de P e de um lado de Q. Sabe-se que Esmeralda não pintou de verde uma quantidade infinita de pontos. Qual é a quantidade máxima de pontos verdes?

Resposta do problema 18: | | | | |

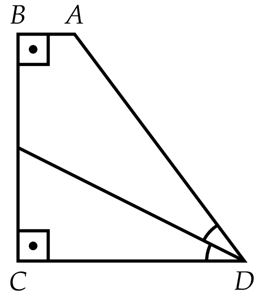
---

19. Qual é o menor valor de n para o qual $101^{n!} - 1$ é múltiplo de cada um dos inteiros positivos menores do que 101?

Resposta do problema 19: | | | | |

---

20. No trapézio retângulo $ABCD$, com $\angle ABC = \angle BCD = 90°$, a base AB mede 104 e a base CD mede 234. Sabendo que a bissetriz do ângulo D intersecta BC no seu ponto médio, determine a medida do lado BC.



Resposta do problema 20: | | | | |

2ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 3 (Ensino Médio)

Nome: ____

Escola: ____

Ano: ( ) 1º ( ) 2º ( ) 3º

Testes

1.	A	B	C	D	E
2.	A	B	C	D	E
3.	A	B	C	D	E
4.	A	B	C	D	E
5.	A	B	C	D	E
6.	A	B	C	D	E
7.	A	B	C	D	E
8.	A	B	C	D	E
9.	A	B	C	D	E
10.	A	B	C	D	E
11.	A	B	C	D	E
12.	A	B	C	D	E
13.	A	B	C	D	E
14.	A	B	C	D	E
15.	A	B	C	D	E

Respostas numéricas

16.				
17.				
18.				
19.				
20.				

2ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 1 (6º ou 7º ano do Ensino Fundamental)

Respostas

Testes

1. A	2. B	3. B	4. C	5. E
6. D	7. C	8. E	9. A	10. E
11. B	12. D	13. D	14. B	15. E

Respostas Numéricas

Problema	16	17	18	19	20
Resposta	0036	1260	0090	0023	0512

Nível 2 (8º ou 9º ano do Ensino Fundamental)

Respostas

Testes

1. B	2. C	3. C	4. B	5. E
6. E	7. A	8. A	9. D	10. B
11. B	12. C	13. D	14. A	15. E

Respostas Numéricas

Problema	16	17	18	19	20
Resposta	1302	0512	0312	0090	0033

Nível 3 (Ensino Médio)

Testes

1. B	2. D	3. B	4. B	5. B
6. A	7. C	8. D	9. A	10. D
11. D	12. C	13. A	14. E	15. D

Respostas Numéricas

Problema	16	17	18	19	20
Resposta	0090	0512	2000	0041	0312

2ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 1 (6º ou 7º ano do Ensino Fundamental)

Respostas

Testes

1. A	2. B	3. B	4. C	5. E
6. D	7. C	8. E	9. A	10. E
11. B	12. D	13. D	14. B	15. E

Respostas Numéricas

Problema	16	17	18	19	20
Resposta	0036	1260	0090	0023	0512

Soluções – Testes

1. *Alternativa A*

A letra C é formada por 7 quadradinhos completos e 4 metades de quadradinhos, a letra J por 6 quadradinhos e 2 metades e a letra P por 8 quadradinhos e 2 metades. A soma das áreas é

$$7 + 4 \cdot 0{,}5 + 6 + 2 \cdot 0{,}5 + 8 + 2 \cdot 0{,}5 = 9 + 7 + 9 = 25 \text{ cm}^2.$$

---

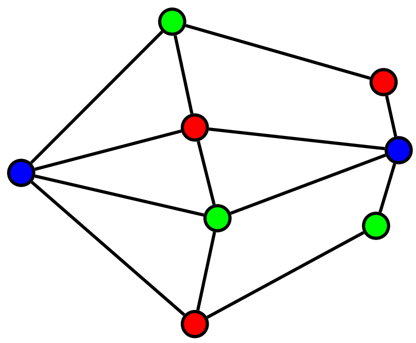
2. *Alternativa B*

João comprou $5 - 3 = 2$ bananas e $3 - 2 = 1$ pera a mais do que Ana, pagando $29 - 20 = 9$ reais a mais. Assim, como o troco foi o mesmo, 2 bananas e 1 pera custam 9 reais. Ana pagou 20 reais por 3 bananas e 2 peras e recebeu troco. Logo $3 - 2 = 1$ banana e $2 - 1 = 1$ pera, mais o troco, valem $20 - 9 = 11$ reais. Esse é o valor que Maria levou.

---

3. *Alternativa B*

Bolinhas que são vértices de um triângulo devem ter cores diferentes, de modo que precisamos de pelo menos três cores. Por outro lado, três cores são suficientes, como mostramos a seguir:



---

4. *Alternativa C*

O valor total da compra é $100 + 20 + 30 = 150$ reais. Se usar o cupom de frete grátis, então o valor será $150 - 20 = 130$ reais. Se usar o cupom de desconto, então o valor será $150 \cdot (100\% - 20\%) = 150 \cdot \frac{80}{100} = 120$ reais. Logo, para pagar menos Regis deve usar o segundo cupom para pagar o valor de 120 reais.

---

5. *Alternativa E*

Temos $2^n(2m + 1) = 15360 = 2^{10} \cdot 15$. Considerando a quantidade de fatores 2 concluímos que $n = 10$ e $2m + 1 = 15 \iff m = 7$. Logo $m + n = 7 + 10 = 17$.

---

6. *Alternativa D*

Sem as promoções, o professor paga $100 \cdot 10 = 1000$ reais com os almoços. Com o desconto de 10%, o professor Paulo paga apenas $10(100\% - 10\%) = 10 \cdot \frac{90}{100} = 9$ reais por almoço. Porém, a cada 10 dias ele paga apenas 9 dias, pois com os carimbos um almoço sai de graça.

Portanto, em 100 dias o professor paga $10 \cdot 9 \cdot 9 = 810$ reais. O desconto em porcentagem é de

$$\frac{1000 - 810}{1000} \cdot 100\% = 19\%.$$

---

7. *Alternativa C*

A soma de todos os números é $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$. Se chamarmos de L_1, L_2 e L_3 as somas de cada linha, então $L_1 + L_2 + L_3 = 45$ é ímpar, pois cada número aparece exatamente uma vez numa linha. Assim, temos 1 linha ou 3 linhas com soma ímpar.

Da mesma forma, temos 1 coluna ou 3 colunas com soma ímpar. Portanto, temos 3 valores possíveis para k: $1 + 1 = 2$, $1 + 3 = 3 + 1 = 4$ e $3 + 3 = 6$. Temos exemplos com 2, 4 e 6 somas ímpares:

1	3	2
5	7	4
6	8	9

3	8	4
1	5	9
6	7	2

8	3	4
1	5	9
6	7	2

---

8. *Alternativa E*

O número 10 não é bombado, pois 9 tem soma dos algarismos maior que $1 + 0 = 1$. O primeiro número bombado de dois algarismos é 18 com soma $1 + 8 = 9$ e o segundo é 19 com soma $1 + 9 = 10$. Depois deles temos 28 com soma $2 + 8 = 10$ e 29 com soma $2 + 9 = 11$. Esse padrão se repete para cada número $X8$ e $X9$ em que X é um algarismo de 1 até 9. Pelo princípio multiplicativo temos $9 \cdot 2 = 18$ números bombados de dois algarismos.

---

9. *Alternativa A*

Considere as vogais A e O. Dividimos o problema nos seguintes casos:

- Ambas são pintadas de azul. Então as três consoantes devem ser pintadas de verde, e só há 1 possibilidade.
- Uma é pintada de azul e a outra, de vermelho. Há duas possibilidades de escolha para qual vogal é pintada de qual cor; as vizinhas da vogal azul devem ser verdes, e a consoante que sobra pode ser pintada de qualquer uma das duas cores disponívels. Há $2 \cdot 2 = 4$ possibilidades.
- Ambas são pintadas de vermelho. Cada uma das três consoantes pode ser pintada de azul ou verde, e há $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ possibilidades.

O total de maneiras de pintar as letras é, então, $1 + 4 + 8 = 13$.

---

10. *Alternativa E*

Veja que $24 = 3 \cdot 8$ e podemos usar os critérios de divisibilidade por 3 e por 8. Pelo critério de divisibilidade por 3 temos que $2 + a + a + a + a + 6 = a + 2 + 3(a + 2)$ é divisível por 3. Concluímos que a deixa resto 1 na divisão por 3 e só pode ser 1, 4 ou 7.

Para a divisibilidade por 8 veja que $2aaaa6 = 2aa \cdot 1000 + aa6 = 2aa \cdot 8 \cdot 125 + aa6$ e o número $aa6$ tem que ser divisível por 8. Entre os números 116, 446 e 776 apenas 776 é divisível por 8. Concluímos que $a = 7$ e que a soma dos algarismos de N é $2 + 4 \cdot 7 + 6 = 36$.

---

11. *Alternativa B*

Sendo X a interseção da reta AM com CD, os triângulos MDX e MBA são semelhantes com razão de semelhança $\frac{MD}{MB} = \frac{1}{3}$. Assim, $DX = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}CD$.

Além disso, como M é ponto médio de DP, os triângulos APM e AMD, de bases congruentes PM e DM e altura comum, têm a mesma área. Logo

$$\text{área } APM + \text{área } MDX = \text{área } AMD + \text{área } MDX = \text{área } ADX = \frac{DX}{CD} \text{ área } ADC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \text{ área } ABCD = \frac{1}{6} \text{ área } ABCD$$

Analogamente, definindo Y como a interseção de CN com AB, área CPN + área $BNY = \frac{1}{6}$ área $ABCD$, e a área sombreada é

$$\frac{1}{6} \text{ área } ABCD + \frac{1}{6} \text{ área } ABCD = \frac{1}{3} \text{ área } ABCD = \frac{1}{3} \cdot 24 = 8.$$

---

12. *Alternativa D*

Veja que $2 \cdot OBM = JP^2 \iff OBM = \frac{JP^2}{2}$. Então JP é um número par e metade do seu quadrado está entre 100 e 999. Temos $100 \leq \frac{JP^2}{2} \leq 999 \iff 200 \leq JP^2 \leq 1998$.

Usando os quadrado próximos temos $14^2 = 196 < JP^2 < 45^2 = 2025$ implicando $14 < JP < 45 \implies 16 \leq JP \leq 44$. As possibilidades são os números pares entre 16 e 44.

Podemos eliminar 22 e 44, pois já tem algarismos repetidos. Podemos eliminar 20, 30 e 40, pois se JP termina em 0, então $\frac{JP^2}{2} = JP \cdot \frac{JP}{2}$ também termina em zero e teríamos algarismos repetidos. Podemos eliminar 16 e 18, que têm algarismo das dezenas 1 e, nesses casos, o número $\frac{JP^2}{2} < \frac{20^2}{2} = 200$ tem algarismo das centenas 1. Podemos eliminar também 32, pois $\frac{32^2}{2} = 32 \cdot 16$ também termina em 2, e 42, pois o número $\frac{42^2}{2} = 42 \cdot 21$ também termina em 2.

Dessa forma, restam 24, 26, 28, 34, 36 e 38. Testando temos $\frac{24^2}{2} = 288$, $\frac{26^2}{2} = 338$, $\frac{28^2}{2} = 392$, $\frac{34^2}{2} = 578$, $\frac{36^2}{2} = 648$ e $\frac{38^2}{2} = 722$. O único número que satisfaz as condições é $JP = 34$ e $OBM = \frac{JP^2}{2} = 578$.

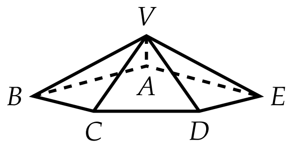
Portanto, $O + B + M + J + P = 5 + 7 + 8 + 3 + 4 = 27$.

---

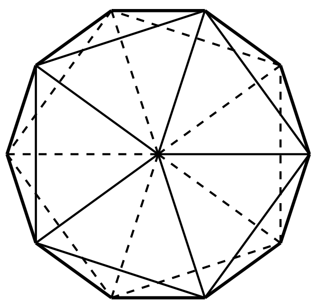
13. *Alternativa D*

Seja O o centro do icosaedro. Assim, se X é um vértice do icosaedro na projeção, o simétrico de X com relação a O é também um vértice na projeção. Reciprocamente, se a projeção de um vértice Y está no interior da projeção do icosaedro, o simétrico de Y com relação a O também está no interior da projeção do icosaedro. Portanto a quantidade de vértices da projeção do icosaedro é par.

Considere agora o vértice V do icosaedro mais distante do plano de projeção. Esse vértice está ligado por arestas a outros cinco vértices, que formam um pentágono regular $ABCDE$. Dentre esses cinco vértices, seja A o mais distante do plano de projeção; o segundo mais distante é um vizinho, digamos B. Usando VAB como referência, pode-se provar que a projeção ortogonal de V está no interior da projeção ortogonal de $ABCDE$.



Por isso, não é possível que os 12 vértices do icosaedro sejam vértices de sua projeção ortogonal. Como a quantidade de vértices é par, no máximo 10 vértices são vértices da projeção. A seguir exibimos uma projeção ortogonal com 10 vértices. A projeção é na direção de dois vértices opostos do icosaedro, que não aparecem como vértices da projeção.



---

14. *Alternativa B*

O número 1 e os primos maiores do que 10, que são 11, 13, 17 e 19, têm mdc igual a 1 com todos os demais números e não têm vizinhos. Além disso, o único vizinho de 7 é 14. Assim, os seis números 1, 7, 11, 13, 17 e 19 não podem ser colocados em círculo.

Por outro lado, os dez números pares podem ser vizinhos entre si, 3 pode ser vizinho de 9 e 15, e 5 pode ser vizinho de 10 e 15. Com isso, podemos formar a fila 6 – 3 – 9 – 15 – 5 – 10, e distribuir os outros 8 números pares arbitrariamente, formando outra fila e juntando as pontas com 6 e 10.

---

15. *Alternativa E*

Excluindo a equipe com mais pontos do grupo, as três restantes terão, considerando apenas os jogos entre elas, alguma das sete possibilidades de pontuações exibidas no enunciado da questão. Assim, para obter as possibilidades de pontuações com 4 equipes basta considerar o desempenho da equipe campeã do grupo e como o total de vitórias, empates e derrotas desta equipe impacta nas possíveis pontuações das demais.

Devemos considerar, então, os seguintes casos:

- *A campeã tem 9 pontos obtidos com 3 vitórias.*

  Há 7 possibilidades neste caso.

- *A campeã tem 7 pontos obtidos com 2 vitórias e 1 empate.*

  Neste caso, uma das três equipes restantes obteve um ponto contra a campeã. As possibilidades são, portanto, 14 ao todo:

$$(7,7,3,0); (7,6,4,0); (7,6,3,1); (7,7,1,1); (7,6,2,1); (7,5,4,0); (7,4,4,1);$$
$$(7,5,3,1); (7,4,3,2); (7,5,2,1); (7,4,3,1); (7,4,2,2); (7,4,3,3); (7,3,2,2).$$

- *A campeã tem 6 pontos obtidos com 2 vitórias e 1 derrota.*

  Neste caso, uma das três equipes restantes obteve três pontos contra a campeã. As possibilidades são, portanto, 7 ao todo:

$$(6,6,6,0); (6,6,3,3); (6,6,4,1); (6,4,4,3); (6,5,4,1); (6,4,4,2); (6,5,2,2).$$

- *A campeã tem 5 pontos obtidos com 1 vitória e 2 empates.*

  Neste caso, duas das três equipes restantes obtiveram um ponto contra a campeã. As possibilidades são, portanto, 9 ao todo:

$$(5,5,5,0); (5,5,4,1); (5,5,3,2); (5,4,4,2); (5,5,3,1); (5,5,2,2); (5,4,3,2); (5,4,4,3); (5,3,3,2).$$

- *A campeã tem 4 pontos obtidos com 1 vitória e 1 empate.*

  Neste caso, uma das três equipes restantes obteve três pontos contra a campeã e outra obteve um ponto contra a campeã . As possibilidades são, portanto, 2 ao todo:

$$(4,4,4,4); (4,4,4,3).$$

- *A campeã tem 3 pontos obtidos com 3 empates.*

  Há uma única possibildade: $(3,3,3,3)$.

São, portanto, $7 + 14 + 7 + 9 + 2 + 1 = 40$ possibilidades.

Soluções – Respostas numéricas

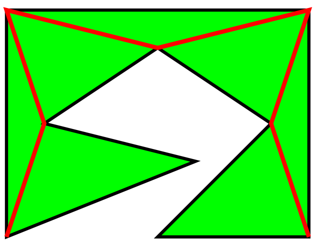
16. *Resposta:* 0036

O menor número com 4 algarismos todos distintos é 1023 e o maior número com 3 algarismos todos distintos é 987. Portanto, a menor diferença possível é $1023 - 987 = 36$.

---

17. *Resposta:* 1260

Usando a figura a seguir, podemos concluir que a soma dos ângulos internos do polígono é igual à soma dos ângulos internos de 7 triângulos. Portanto, a soma dos ângulos internos é $7 \cdot 180° = 1260°$.



---

18. *Resposta:* 0090

As somas de 2023 algarismos não nulos está entre $2023 \cdot 1$ (2023 uns) e $2023 \cdot 9$ (2023 noves). Como $2023 = 45^2 - 2 \iff 2023 \cdot 9 = 9 \cdot 45^2 - 18 = (3 \cdot 45)^2 - 18$,

$$44^2 < 2023 < 45^2 < (3 \cdot 45 - 1)^2 < 2023 \cdot 9 < (3 \cdot 45)^2,$$

e há $(3 \cdot 45 - 1) - 45 + 1 = 90$ possíveis somas de dígitos de números perfeitosos.

19. *Resposta:* 0023

Seja $\overline{AB} = 10A + B = 9A + A + B$ um número de dois algarismos divisível pela soma dos seus algarismos. Assim, $\frac{10A+B}{A+B} = \frac{9A}{A+B} + 1$ é inteiro e $\frac{9A}{A+B}$ é inteiro.

Se $B = 0$, $\frac{9A}{A+B} = 9$ é inteiro, e obtemos 9 soluções: os números terminados em zero.

Se $B \neq 0$, então $A + B > A$, de modo que $\frac{A}{A+B} < 1$ não é inteiro. Então $A + B$ precisa ter um fator de 9, ou seja, $A + B$ é múltiplo de 3. Note que se $A + B$ é par então $9A$ também precisa ser par, ou seja, A é par. Estudamos os casos:

- $A + B = 3$: há as 2 possibilidades 12 e 21.
- $A + B = 6$: A é par e há as 2 possibilidades 24 e 42.
- $A + B = 9$: há 8 possibilidades, sendo $A = 1, 2, \ldots, 8$ e $B = 9 - A$.
- $A + B = 12$: temos $\frac{9A}{A+B} = \frac{3A}{4}$, assim A é múltiplo de 4. Temos as 2 possibilidades 48 e 84.
- $A + B = 15$: temos $\frac{9A}{A+B} = \frac{3A}{5}$, assim A é múltiplo de 5. Aí $A = 5$ e $B = 10$, o que não é possível.
- $A + B = 18$: só temos a possibilidade $A = B = 9$, que também não dá certo.

O total é, então, $9 + 2 + 2 + 8 + 2 = 23$.

---

20. *Resposta:* 0512

Considere cada coluna do tabuleiro. Cada quadrado da primeira coluna pode ser pintada de verde ou amarelo, de modo que há $2 \cdot 2 = 4$ possibilidades para pintar essa coluna. Para cada coluna subsequente:

- Se a coluna anterior tem quadrados com a mesma cor, deve-se pintar a próxima coluna com duas cores diferentes, o que pode ser feito de duas maneiras (decidimos qual quadrado fica de cada cor).
- Se a coluna anterior tem quadrados com cores diferentes, a próxima coluna deve ter duas cores iguais. Há duas escolhas: a cor a ser utilizada.

Assim, independentemente da situação, cada uma das próximas $8 - 1 = 7$ colunas pode ser pintada de duas maneiras, e há $4 \cdot 2^7 = 512$ possíveis pinturas.

2ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 2 (8º ou 9º ano do Ensino Fundamental)

Respostas

Testes

1. B	2. C	3. C	4. B	5. E
6. E	7. A	8. A	9. D	10. B
11. B	12. C	13. D	14. A	15. E

Respostas Numéricas

Problema	16	17	18	19	20
Resposta	1302	0512	0312	0090	0033

Soluções – Testes

1. *Alternativa B*

João comprou $5-3=2$ bananas e $3-2=1$ pera a mais do que Ana, pagando $29-20=9$ reais a mais. Assim, como o troco foi o mesmo, 2 bananas e 1 pera custam 9 reais. Ana pagou 20 reais por 3 bananas e 2 peras e recebeu troco. Logo $3-2=1$ banana e $2-1=1$ pera, mais o troco, valem $20-9=11$ reais. Esse é o valor que Maria levou.

---

2. *Alternativa C*

O valor total da compra é $100+20+30=150$ reais. Se usar o cupom de frete grátis, então o valor será $150-20=130$ reais. Se usar o cupom de desconto, então o valor será $150\cdot(100\%-20\%)=150\cdot\frac{80}{100}=120$ reais. Logo, para pagar menos Regis deve usar o segundo cupom para pagar o valor de 120 reais.

---

3. *Alternativa C*

A soma de todos os números é $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. Se chamarmos de L_1, L_2 e L_3 as somas de cada linha, então $L_1+L_2+L_3=45$ é ímpar, pois cada número aparece exatamente uma vez numa linha. Assim, temos 1 linha ou 3 linhas com soma ímpar.

Da mesma forma, temos 1 coluna ou 3 colunas com soma ímpar. Portanto, temos 3 valores possíveis para k: $1+1=2$, $1+3=3+1=4$ e $3+3=6$. Temos exemplos com 2, 4 e 6 somas ímpares:

1	3	2
5	7	4
6	8	9

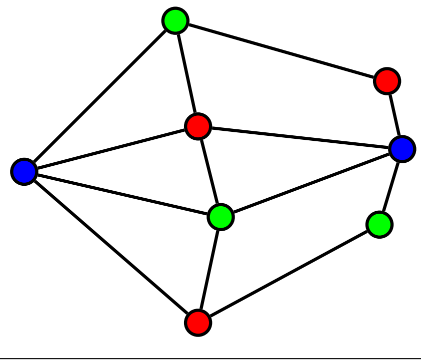
3	8	4
1	5	9
6	7	2

8	3	4
1	5	9
6	7	2

---

4. *Alternativa B*

Bolinhas que são vértices de um triângulo devem ter cores diferentes, de modo que precisamos de pelo menos três cores. Por outro lado, três cores são suficientes, como mostramos a seguir:



---

5. *Alternativa E*

Temos $2^n(2m+1) = 15360 = 2^{10} \cdot 15$. Considerando a quantidade de fatores 2 concluímos que $n = 10$ e $2m+1 = 15 \iff m = 7$. Logo $m + n = 7 + 10 = 17$.

---

6. *Alternativa E*

Veja que $24 = 3 \cdot 8$ e podemos usar os critérios de divisibilidade por 3 e por 8. Pelo critério de divisibilidade por 3 temos que $2 + a + a + a + a + 6 = a + 2 + 3(a+2)$ é divisível por 3. Concluímos que a deixa resto 1 na divisão por 3 e só pode ser 1, 4 ou 7.

Para a divisibilidade por 8 veja que $2aaaa6 = 2aa \cdot 1000 + aa6 = 2aa \cdot 8 \cdot 125 + aa6$ e o número $aa6$ tem que ser divisível por 8. Entre os números 116, 446 e 776 apenas 776 é divisível por 8. Concluímos que $a = 7$ e que a soma dos algarismos de N é $2 + 4 \cdot 7 + 6 = 36$.

---

7. *Alternativa A*

Sabe-se que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \implies \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}.$$

Assim,

$$k = \frac{x+2^2}{y+2} = \frac{x+1^2}{y+1} = \frac{(x+2^2)-(x+1^2)}{(y+2)-(y+1)} = 3.$$

---

8. *Alternativa A*

Considere as vogais A e O. Dividimos o problema nos seguintes casos:

- Ambas são pintadas de azul. Então as três consoantes devem ser pintadas de verde, e só há 1 possibilidade.
- Uma é pintada de azul e a outra, de vermelho. Há duas possibilidades de escolha para qual vogal é pintada de qual cor; as vizinhas da vogal azul devem ser verdes, e a consoante que sobra pode ser pintada de qualquer uma das duas cores disponívels. Há $2 \cdot 2 = 4$ possibilidades.
- Ambas são pintadas de vermelho. Cada uma das três consoantes pode ser pintada de azul ou verde, e há $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ possibilidades.

O total de maneiras de pintar as letras é, então, $1 + 4 + 8 = 13$.

---

9. *Alternativa D*

Veja que $2 \cdot OBM = JP^2 \iff OBM = \frac{JP^2}{2}$. Então JP é um número par e metade do seu quadrado está entre 100 e 999. Temos $100 \leq \frac{JP^2}{2} \leq 999 \iff 200 \leq JP^2 \leq 1998$.

Usando os quadrado próximos temos $14^2 = 196 < JP^2 < 45^2 = 2025$ implicando $14 < JP < 45 \implies 16 \leq JP \leq 44$. As possibilidades são os números pares entre 16 e 44.

Podemos eliminar 22 e 44, pois já tem algarismos repetidos. Podemos eliminar 20, 30 e 40, pois se JP termina em 0, então $\frac{JP^2}{2} = JP \cdot \frac{JP}{2}$ também termina em zero e teríamos algarismos repetidos. Podemos eliminar 16 e 18, que têm algarismo das dezenas 1 e, nesses casos, o número $\frac{JP^2}{2} < \frac{20^2}{2} = 200$ tem algarismo das centenas 1. Podemos eliminar também 32, pois $\frac{32^2}{2} = 32 \cdot 16$ também termina em 2, e 42, pois o número $\frac{42^2}{2} = 42 \cdot 21$ também termina em 2.

Dessa forma, restam 24, 26, 28, 34, 36 e 38. Testando temos $\frac{24^2}{2} = 288$, $\frac{26^2}{2} = 338$, $\frac{28^2}{2} = 392$, $\frac{34^2}{2} = 578$, $\frac{36^2}{2} = 648$ e $\frac{38^2}{2} = 722$. O único número que satisfaz as condições é $JP = 34$ e $OBM = \frac{JP^2}{2} = 578$.

Portanto, $O + B + M + J + P = 5 + 7 + 8 + 3 + 4 = 27$.

---

10. *Alternativa B*

Sendo X a interseção da reta AM com CD, os triângulos MDX e MBA são semelhantes com razão de semelhança $\frac{MD}{MB} = \frac{1}{3}$. Assim, $DX = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}CD$.

Além disso, como M é ponto médio de DP, os triângulos APM e AMD, de bases congruentes PM e DM e altura comum, têm a mesma área. Logo

$$\text{área } APM + \text{área } MDX = \text{área } AMD + \text{área } MDX = \text{área } ADX = \frac{DX}{CD}\text{ área } ADC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\text{ área } ABCD = \frac{1}{6}\text{ área } ABCD$$

Analogamente, definindo Y como a interseção de CN com AB, área CPN + área $BNY = \frac{1}{6}$ área $ABCD$, e a área sombreada é

$$\frac{1}{6}\,\text{área}\,ABCD + \frac{1}{6}\,\text{área}\,ABCD = \frac{1}{3}\,\text{área}\,ABCD = \frac{1}{3}\cdot 24 = 8.$$

---

11. *Alternativa B*

Seja S_r, $r = 0, 1, 2$, o conjunto dos números de $\{1, 2, \ldots, 2023\}$ que deixam resto r na divisão por 3, ou seja,

$$S_0 = \{3, 6, \ldots, 2022\}, \quad S_1 = \{1, 4, \ldots, 2023\} \quad \text{e} \quad S_2 = \{2, 5, \ldots, 2021\}.$$

Note que, sendo $2023 = 3 \cdot 674 + 1$, S_0 e S_2 têm 674 elementos cada e S_1 tem 675 elementos. Como a soma de quaisquer dois múltiplos de 3 é um múltiplo de 3, o subconjunto X tem no máximo um elemento de S_0. A soma de qualquer elemento de S_1 com qualquer elemento de S_2 é um múltiplo de 3. Logo X não pode ter elementos de S_1 e S_2 simultaneamente.

Logo X tem no máximo $|S_1| + 1 = 675 + 1$ elementos, e podemos tomar, por exemplo, $X = \{3\} \cup S_1$.

---

12. *Alternativa C*

Sendo

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + (x+1)^2 + (x(x+1))^2} &= \sqrt{2x^2 + 2x + 1 + (x(x+1))^2}\\ = \sqrt{(x(x+1))^2 + 2x(x+1) + 1} &= \sqrt{(x(x+1)+1)^2} = x(x+1) + 1,\end{aligned}$$

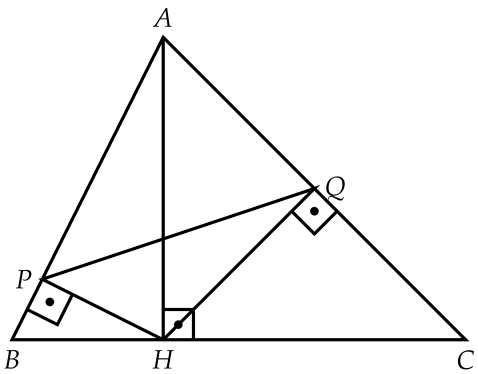
temos

$$\begin{aligned}&\sqrt{2022^2 + 2023^2 + (2022 \cdot 2023)^2} + \sqrt{2023^2 + 2024^2 + (2023 \cdot 2024)^2}\\ &= 2022 \cdot 2023 + 1 + 2023 \cdot 2024 + 1 = 2023(2022 + 2024) + 2 = 2(2023^2 + 1).\end{aligned}$$

Como 2023^2 termina em $3^2 = 9$, o valor da expressão termina em 0 (somamos 1 e dobramos), ou seja, o número dado é inteiro e múltiplo de 5.

---

13. *Alternativa D*



Como $\angle APH + \angle AQH = 90^\circ + 90^\circ$, o quadrilátero $APHQ$ é cíclico. Assim, o ângulo entre AH e PQ é

$$\angle AHQ + \angle HQP = (90^\circ - \angle QHC) + \angle HAP = C + 90^\circ - B = 90^\circ - (B - C) = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ.$$

---

14. *Alternativa A*

Se $\frac{1}{r}$ é raiz de $x^2 - (b+3)x + (a+3) = 0$ então

$$\frac{1}{r^2} - (b+3)\frac{1}{r} + (a+3) = 0 \iff (a+3)r^2 - (b+3)r + 1 = 0.$$

Da mesma forma, $(a+3)s^2 - (b+3)s + 1 = 0$. Assim, r e s são raízes de $(a+3)x^2 - (b+3)x + 1 = 0$ e de $x^2 - ax + b = 0$. Portanto

$$\frac{a+3}{1} = \frac{b+3}{a} = \frac{1}{b} \iff a = b(b+3) \text{ e } b(a+3) = 1 \implies b(b(b+3)+3) = 1 \iff b^3 + 3b^2 + 3b + 1 = 2 \iff (b+1)^3 = 2.$$

---

15. *Alternativa E*

Excluindo a equipe com mais pontos do grupo, as três restantes terão, considerando apenas os jogos entre elas, alguma das sete possibilidades de pontuações exibidas no enunciado da questão. Assim, para obter as possibilidades de pontuações com 4 equipes basta considerar o desempenho da equipe campeã do grupo e como o total de vitórias, empates e derrotas desta equipe impacta nas possíveis pontuações das demais.

Devemos considerar, então, os seguintes casos:

- *A campeã tem 9 pontos obtidos com 3 vitórias.*

  Há 7 possibilidades neste caso.

- *A campeã tem 7 pontos obtidos com 2 vitórias e 1 empate.*

  Neste caso, uma das três equipes restantes obteve um ponto contra a campeã. As possibilidades são, portanto, 14 ao todo:

$$(7,7,3,0);(7,6,4,0);(7,6,3,1);(7,7,1,1);(7,6,2,1);(7,5,4,0);(7,4,4,1);$$
$$(7,5,3,1);(7,4,3,2);(7,5,2,1);(7,4,3,1);(7,4,2,2);(7,4,3,3);(7,3,2,2).$$

- *A campeã tem 6 pontos obtidos com 2 vitórias e 1 derrota.*

  Neste caso, uma das três equipes restantes obteve três pontos contra a campeã. As possibilidades são, portanto, 7 ao todo:

$$(6,6,6,0);(6,6,3,3);(6,6,4,1);(6,4,4,3);(6,5,4,1);(6,4,4,2);(6,5,2,2).$$

- *A campeã tem 5 pontos obtidos com 1 vitória e 2 empates.*

  Neste caso, duas das três equipes restantes obtiveram um ponto contra a campeã. As possibilidades são, portanto, 9 ao todo:

$$(5,5,5,0);(5,5,4,1);(5,5,3,2);(5,4,4,2);(5,5,3,1);(5,5,2,2);(5,4,3,2);(5,4,4,3);(5,3,3,2).$$

- *A campeã tem 4 pontos obtidos com 1 vitória e 1 empate.*

  Neste caso, uma das três equipes restantes obteve três pontos contra a campeã e outra obteve um ponto contra a campeã . As possibilidades são, portanto, 2 ao todo:

$$(4,4,4,4);(4,4,4,3).$$

- *A campeã tem 3 pontos obtidos com 3 empates.*

  Há uma única possibildade: $(3,3,3,3)$.

São, portanto, $7+14+7+9+2+1=40$ possibilidades.

Soluções – Respostas numéricas

16. *Resposta:* 1302

Sabe-se que $\mathrm{mdc}(a,b)\cdot\mathrm{mmc}(a,b)=ab$. Logo $6\cdot 36a^2=ab \iff b=216a$. Com isso, a divide b, de modo que $\mathrm{mdc}(a,b)=a$ e $\mathrm{mmc}(a,b)=b$. Portanto $a=6$ e $b=1296$, e $a+b=1302$.

---

17. *Resposta:* 0512

Considere cada coluna do tabuleiro. Cada quadrado da primeira coluna pode ser pintada de verde ou amarelo, de modo que há $2\cdot 2=4$ possibilidades para pintar essa coluna. Para cada coluna subsequente:

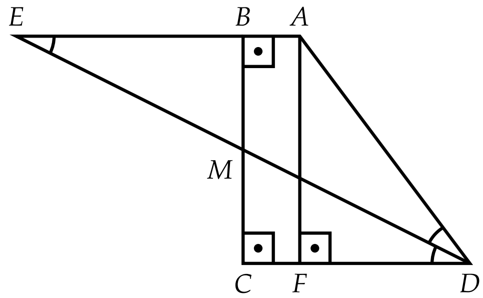
- Se a coluna anterior tem quadrados com a mesma cor, deve-se pintar a próxima coluna com duas cores diferentes, o que pode ser feito de duas maneiras (decidimos qual quadrado fica de cada cor).
- Se a coluna anterior tem quadrados com cores diferentes, a próxima coluna deve ter duas cores iguais. Há duas escolhas: a cor a ser utilizada.

Assim, independentemente da situação, cada uma das próximas $8-1=7$ colunas pode ser pintada de duas maneiras, e há $4\cdot 2^7=512$ possíveis pinturas.

---

18. *Resposta:* 0312

Prolongue AB por B e a bissetriz de $\angle ADC$, obtendo em sua interseção o ponto E, e seja M o ponto médio de BC.



Como $BM = CM$, $\angle MBE = \angle MCD$ (retos) e $\angle BME = \angle CMD$, pelo caso ALA os triângulos MBE e MCD são congruentes. Logo $BE = CD$.

Sendo AE e CD paralelos e DE bissetriz, $\angle AED = \angle EDC = \angle ADE$. Logo o triângulo ADE é isósceles, e $AD = AE = AB + BE = AB + CD$.

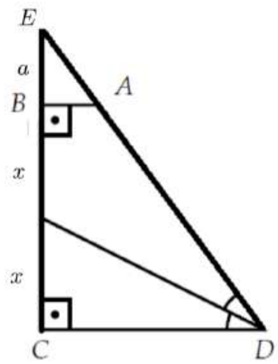
Portanto, no triângulo retângulo AFD,

$$AF^2 + FD^2 = AD^2 \iff BC^2 + (CD - AB)^2 = (AB + CD)^2 \iff BC = 2\sqrt{AB \cdot CD}.$$

Substituindo os valores de AB e CD, obtemos

$$BC = 2\sqrt{104 \cdot 234} = 2\sqrt{4 \cdot 26 \cdot 2 \cdot 117} = 4\sqrt{4 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 9} = 4 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 3 = 3 \cdot 104 = 312.$$

Outra Solução: Seja $BC = 2x$. A bissetriz do vértice D forma dois segmentos de tamanho x. Seja E o ponto de encontro das retas DA e CB e seja $EB = a$.



Os triângulos EBA e ECD são semelhantes por AA e $\frac{a}{104} = \frac{a+2x}{234} = \frac{2x}{130} = \frac{x}{65}$ implicando $a = \frac{104x}{65}$.
Podemos usar o Teorema da Bissetriz Interna no triângulo ECD para obter $\frac{ED}{DC} = \frac{\frac{104x}{65}+x}{x} \Leftrightarrow ED = \frac{104+65}{65} \cdot DC = \frac{13}{5} \cdot 234$.
Isso nos permite concluir que o triângulo retângulo ECD é semelhante ao triângulo de lados $(5, 12, 13)$ e $EC = \frac{12}{5} \cdot 234$. Substituindo a expressão de EC usando x temos $\frac{104x}{65} + 2x = \frac{12}{5} \cdot 234 \Leftrightarrow \frac{234x}{65} = \frac{12}{5} \cdot 234 \Leftrightarrow x = 12 \cdot 13 = 156$. Dessa forma, $BC = 2x = 312$.

---

19. *Resposta:* 0090

As somas de 2023 algarismos não nulos está entre $2023 \cdot 1$ (2023 uns) e $2023 \cdot 9$ (2023 noves). Como $2023 = 45^2 - 2 \iff 2023 \cdot 9 = 9 \cdot 45^2 - 18 = (3 \cdot 45)^2 - 18$,

$$44^2 < 2023 < 45^2 < (3 \cdot 45 - 1)^2 < 2023 \cdot 9 < (3 \cdot 45)^2,$$

e há $(3 \cdot 45 - 1) - 45 + 1 = 90$ possíveis somas de dígitos de números perfeitosos.

---

20. *Resposta:* 0033

Os restos da divisão dos números de Fibonacci por 3 são:

$$1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, \ldots$$

que repetem o ciclo $1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0$. Os múltiplos de 3 são os que estão em posições múltiplas de 4.

Os restos da divisão dos números de Fibonacci por 4 são:

$$1, 1, 2, 3, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 1, 0, \ldots$$

que repetem o ciclo $1, 1, 2, 3, 1, 0$. Os múltiplos de 4 são os que estão em posições múltiplas de 6.

Assim, a quantidade de múltiplos de 3 ou 4 é a quantidade de índices menores ou iguais a 100 que são múltiplos de 4 ou 6. Descontando os múltiplos de $\text{mmc}(4, 6) = 12$, o total é

$$\left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{12} \right\rfloor = 25 + 16 - 8 = 33.$$

2ª COMPETIÇÃO JACOB PALIS JÚNIOR DE MATEMÁTICA

Nível 3 (Ensino Médio)

Respostas

Testes

1. B	2. D	3. B	4. B	5. B
6. A	7. C	8. D	9. A	10. D
11. D	12. C	13. A	14. E	15. D

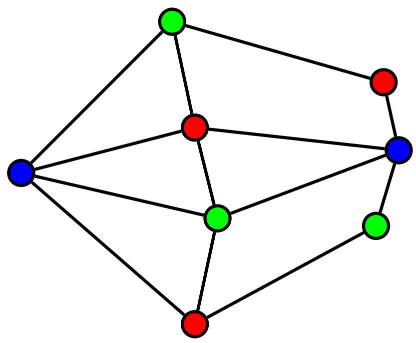
Respostas Numéricas

Problema	16	17	18	19	20
Resposta	0090	0512	2000	0041	0312

Soluções – Testes

1. *Alternativa B*

Bolinhas que são vértices de um triângulo devem ter cores diferentes, de modo que precisamos de pelo menos três cores. Por outro lado, três cores são suficientes, como mostramos a seguir:

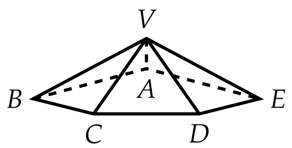


---

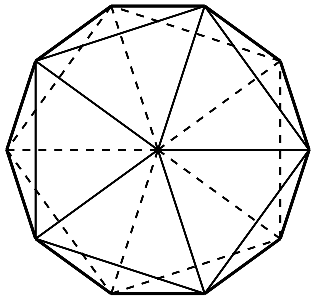
2. *Alternativa D*

Seja O o centro do icosaedro. Assim, se X é um vértice do icosaedro na projeção, o simétrico de X com relação a O é também um vértice na projeção. Reciprocamente, se a projeção de um vértice Y está no interior da projeção do icosaedro, o simétrico de Y com relação a O também está no interior da projeção do icosaedro. Portanto a quantidade de vértices da projeção do icosaedro é par.

Considere agora o vértice V do icosaedro mais distante do plano de projeção. Esse vértice está ligado por arestas a outros cinco vértices, que formam um pentágono regular $ABCDE$. Dentre esses cinco vértices, seja A o mais distante do plano de projeção; o segundo mais distante é um vizinho, digamos B. Usando VAB como referência, pode-se provar que a projeção ortogonal de V está no interior da projeção ortogonal de $ABCDE$.



Por isso, não é possível que os 12 vértices do icosaedro sejam vértices de sua projeção ortogonal. Como a quantidade de vértices é par, no máximo 10 vértices são vértices da projeção. A seguir exibimos uma projeção ortogonal com 10 vértices. A projeção é na direção de dois vértices opostos do icosaedro, que não aparecem como vértices da projeção.



---

3. *Alternativa B*

Temos $a_{n+1} = \frac{1-a_n^2}{a_{n-1}}$, de modo que $a_3 = \frac{1-2^2}{1} = -3$, $a_4 = \frac{1-(-3)^2}{2} = -4$, $a_5 = \frac{1-(-4)^2}{-3} = 5$, o que sugere que

$$a_n = \begin{cases} n & \text{se } n = 4k+1 \text{ ou } n = 4k+2 \\ -n & \text{se } n = 4k+3 \text{ ou } n = 4k \end{cases}$$

De fato, indutivamente se a_k é como definido acima para $k \le n$,

$$a_{n+1} = \frac{1-a_n^2}{a_{n-1}} = \frac{1-n^2}{\pm(n-1)} = \mp(n+1),$$

sendo que a_{n+1} e a_{n-1} têm sinais opostos. Isso mostra que a_n é como acima, e em particular $a_{2023} = -2023$.

---

4. *Alternativa B*

O número 1 e os primos maiores do que 10, que são 11, 13, 17 e 19, têm mdc igual a 1 com todos os demais números e não têm vizinhos. Além disso, o único vizinho de 7 é 14. Assim, os seis números 1, 7, 11, 13, 17 e 19 não podem ser colocados em círculo.

Por outro lado, os dez números pares podem ser vizinhos entre si, 3 pode ser vizinho de 9 e 15, e 5 pode ser vizinho de 10 e 15. Com isso, podemos formar a fila $6-3-9-15-5-10$, e distribuir os outros 8 números pares arbitrariamente, formando outra fila e juntando as pontas com 6 e 10.

---

5. *Alternativa B*

Sendo X a interseção da reta AM com CD, os triângulos MDX e MBA são semelhantes com razão de semelhança $\frac{MD}{MB} = \frac{1}{3}$. Assim, $DX = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}CD$.

Além disso, como M é ponto médio de DP, os triângulos APM e AMD, de bases congruentes PM e DM e altura comum, têm a mesma área. Logo

$$\text{área } APM + \text{área } MDX = \text{área } AMD + \text{área } MDX = \text{área } ADX = \frac{DX}{CD}\,\text{área } ADC = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\,\text{área } ABCD = \frac{1}{6}\,\text{área } ABCD$$

Analogamente, definindo Y como a interseção de CN com AB, área CPN + área $BNY = \frac{1}{6}$ área $ABCD$, e a área sombreada é

$$\frac{1}{6}\,\text{área } ABCD + \frac{1}{6}\,\text{área } ABCD = \frac{1}{3}\,\text{área } ABCD = \frac{1}{3}\cdot 24 = 8.$$

---

6. *Alternativa A*

Considere as vogais A e O. Dividimos o problema nos seguintes casos:

- Ambas são pintadas de azul. Então as três consoantes devem ser pintadas de verde, e só há 1 possibilidade.
- Uma é pintada de azul e a outra, de vermelho. Há duas possibilidades de escolha para qual vogal é pintada de qual cor; as vizinhas da vogal azul devem ser verdes, e a consoante que sobra pode ser pintada de qualquer uma das duas cores disponíveis. Há $2 \cdot 2 = 4$ possibilidades.
- Ambas são pintadas de vermelho. Cada uma das três consoantes pode ser pintada de azul ou verde, e há $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ possibilidades.

O total de maneiras de pintar as letras é, então, $1 + 4 + 8 = 13$.

---

7. *Alternativa C*

Sendo

$$\sqrt{x^2+(x+1)^2+(x(x+1))^2} = \sqrt{2x^2+2x+1+(x(x+1))^2}$$
$$= \sqrt{(x(x+1))^2+2x(x+1)+1} = \sqrt{(x(x+1)+1)^2} = x(x+1)+1,$$

temos

$$\sqrt{2022^2+2023^2+(2022\cdot 2023)^2}+\sqrt{2023^2+2024^2+(2023\cdot 2024)^2}$$
$$= 2022\cdot 2023+1+2023\cdot 2024+1 = 2023(2022+2024)+2 = 2(2023^2+1).$$

Como 2023^2 termina em $3^2=9$, o valor da expressão termina em 0 (somamos 1 e dobramos), ou seja, o número dado é inteiro e múltiplo de 5.

---

8. *Alternativa D*

Sendo $\frac{1}{N}=0,\overline{abcde}$, $\frac{1}{N}=\frac{abcde}{99999} \iff N=\frac{99999}{abcde}$, de modo que N é divisor de $99999=3^2\cdot 41\cdot 271$. Como $\frac{1}{3}=0,\overline{3}$ e $\frac{1}{9}=0,\overline{9}$ têm período de tamanho 1 e $\frac{1}{41}=0,\overline{02439}$, a resposta é $N=41$.

---

9. *Alternativa A*

Sendo $a+b+c=0$, $bc-a^2=bc-a(-b-c)=ab+ac+bc$. Analogamente, $ca-b^2=ab-c^2=ab+ac+bc$. Logo

$$\frac{a}{(bc-a^2)^3}+\frac{b}{(ca-b^2)^3}+\frac{c}{(ab-c^2)^3}=\frac{a+b+c}{(ab+ac+bc)^3}=0.$$

---

10. *Alternativa D*

Sejam A_1 e A_2 os dois times do Rio de Janeiro. Vamos mostrar que cada time joga contra outro de outro estado se, e somente se, A_1 e A_2 jogam em dois jogos diferentes e existe um outro estado cujos times B_1 e B_2 jogam nos demais dois jogos, em partidas diferentes. De fato, se cada time joga contra outro de outro estado, A_1 e A_2 precisam jogar em partidas diferentes; eles jogam contra times de no máximo dois outros estados; como são quatro estados, sobra um estado cujos times B_1 e B_2 não jogam contra A_1 nem A_2; os times desses estados devem jogar em partidas diferentes.

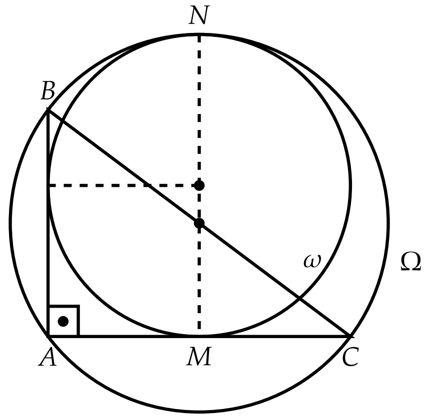
Reciprocamente, se A_1, A_2, B_1 e B_2 jogam em quatro partidas diferentes, não é possível que os demais times, C_1, C_2 de um estado e D_1, D_2 do quarto estado, joguem contra o rival do mesmo estado.

Assim, a probabilidade pedida é a probabilidade de A_1 não jogar contra A_2, que é $\frac{6}{7}$ (A_1 pode jogar contra qualquer um dos demais 7 times, exceto A_2), vezes a probabilidade de B_1 e B_2 não jogarem entre si, que é $\frac{2}{3}$ (escolhemos os oponentes de A_1 e A_2, sobrando quatro times; B_1 só não pode jogar contra B_2, sobrando outros dois oponentes). Logo, a probabilidade é $\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{7}$.

Outra Solução: Vamos calcular a probabilidade contando casos favoráveis sobre o total.
O total é $\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}\cdot\frac{1}{4!}=\frac{8!}{2^4\cdot 4!}=105$, pois escolhemos os times de 2 em 2 e temos 4! maneiras de ordenar os mesmos embates.
Para contar os casos favoráveis Veja que os times de São Paulo, que chamaremos de S_1 e S_2 não podem enfrentar times dos outros três estados, então existe um estado A tal que os times A_1 e A_2 não enfrentam os times de São Paulo. Temos 3 maneiras de escolher o estado A e 4! maneiras de distribuir os outros 4 times enfrentando S_1, S_2, A_1 e A_2. Porém, os casos em que os times de São Paulo enfrentam os times de um mesmo estado são contados duas vezes, pois há duas opções para o estado A. Temos que descontar $3\cdot 2\cdot 2$, pois são 3 estados que podem enfrentar o estado de São Paulo e depois de escolher os estados que se enfrentam temos $2\cdot 2$ formas de definir os confrontos.
Portanto, a probabilidade pedida é igual a $\frac{3\cdot 4!-3\cdot 2\cdot 2}{105}=\frac{60}{105}=\frac{4}{7}$.

---

11. *Alternativa D*



O centro de Ω é o ponto médio de BC, assim a reta que liga os centros de Ω e ω é a mediatriz de AC. Logo o raio de ω é $AC/2$. Além disso, observando o segmento MN, que liga o ponto médio de AC e o ponto de tangência N, temos $MN = 2 \cdot AC/2 = BC/2 + AB/2$.

Com isso,

$$2AC = AB + BC \iff 2AC - AB = BC \iff 4AC^2 - 4AC \cdot AB + AB^2 = BC^2 = AB^2 + AC^2 \implies AB = \frac{3}{4}AC.$$

Logo $AB : AC = 3 : 4$, e pelo teorema de Pitágoras, $AB : AC : BC = 3 : 4 : 5$.

---

12. *Alternativa C*

Primeiro, note que $2023 = 45^2 - 2 = (43 + 2)^2 - 2 = 43^2 + 4 \cdot 43 + 2$, e podemos tomar $a = 1$, $b = 4$, $c = 2$ e $x = 43$. Nesse caso, $a + b + c = 7$.

Seja $a + b + c = s$, $3 \le s \le 6$. Então $c = s - a - b$ e

$$ax^2 + bx + c = 2023 \iff ax^2 + bx + s - a - b = 2023 \iff (x - 1)(a(x + 1) + b) = 2023 - s.$$

Observe que, sendo $a + b = s - c \le 5$, $a \le 4$ e $a(x + 1) + b \le 4x + 5 = 4(x - 1) + 9$, ou seja, o fator $a(x + 1) + b$ não pode ser muito maior do que o fator $x - 1$.

Agora estudamos cada caso de s:

- $s = 6$: $(x - 1)(a(x + 1) + b) = 2017$. Impossível, pois 2017 é primo, o que implicaria $x - 1 = 1$ e $a(x + 1) + b = 2017 > 4(x - 1) + 9 = 13$.
- $s = 5$: $(x - 1)(a(x + 1) + b) = 2018 = 2 \cdot 1009$. Impossível, pois 1009 é primo, o que implicaria $x - 1 \le 2 \implies 4(x - 1) + 9 \le 17$ e $a(x + 1) + b \ge 1009 > 17$.
- $s = 4$: $(x - 1)(a(x + 1) + b) = 2019 = 3 \cdot 673$. Impossível, pois 673 é primo, o que implicaria $x - 1 \le 3 \implies 4(x - 1) + 9 \le 21$ e $a(x + 1) + b \ge 673 > 21$.
- $s = 3$: $(x - 1)(a(x + 1) + b) = 2020$. Como $s = a + b + c = 3$, a única possibilidade é $a = b = c = 1$, e temos $(x - 1)(x + 2) = 2020$, que não tem soluções inteiras pois o maior fator primo de 2020 é 101, o que implica $x + 2 \ge 101 \iff x - 1 \ge 98$, e aí $(x - 1)(x + 2) \ge 98 \cdot 101 > 2020$.

Logo o menor valor de $a + b + c$ é 7.

---

13. *Alternativa A*

Se $\frac{1}{r}$ é raiz de $x^2 - (b + 3)x + (a + 3) = 0$ então

$$\frac{1}{r^2} - (b + 3)\frac{1}{r} + (a + 3) = 0 \iff (a + 3)r^2 - (b + 3)r + 1 = 0.$$

Da mesma forma, $(a+3)s^2 - (b+3)s + 1 = 0$. Assim, r e s são raízes de $(a+3)x^2 - (b+3)x + 1 = 0$ e de $x^2 - ax + b = 0$. Portanto

$$\frac{a+3}{1} = \frac{b+3}{a} = \frac{1}{b} \iff a = b(b+3) \text{ e } b(a+3) = 1 \implies b(b(b+3)+3) = 1 \iff b^3+3b^2+3b+1 = 2 \iff (b+1)^3 = 2.$$

---

14. *Alternativa E*

Excluindo a equipe com mais pontos do grupo, as três restantes terão, considerando apenas os jogos entre elas, alguma das sete possibilidades de pontuações exibidas no enunciado da questão. Assim, para obter as possibilidades de pontuações com 4 equipes basta considerar o desempenho da equipe campeã do grupo e como o total de vitórias, empates e derrotas desta equipe impacta nas possíveis pontuações das demais.

Devemos considerar, então, os seguintes casos:

- *A campeã tem 9 pontos obtidos com 3 vitórias.*

  Há 7 possibilidades neste caso.

- *A campeã tem 7 pontos obtidos com 2 vitórias e 1 empate.*

  Neste caso, uma das três equipes restantes obteve um ponto contra a campeã. As possibilidades são, portanto, 14 ao todo:

$$(7,7,3,0); (7,6,4,0); (7,6,3,1); (7,7,1,1); (7,6,2,1); (7,5,4,0); (7,4,4,1);$$
$$(7,5,3,1); (7,4,3,2); (7,5,2,1); (7,4,3,1); (7,4,2,2); (7,4,3,3); (7,3,2,2).$$

- *A campeã tem 6 pontos obtidos com 2 vitórias e 1 derrota.*

  Neste caso, uma das três equipes restantes obteve três pontos contra a campeã. As possibilidades são, portanto, 7 ao todo:

$$(6,6,6,0); (6,6,3,3); (6,6,4,1); (6,4,4,3); (6,5,4,1); (6,4,4,2); (6,5,2,2).$$

- *A campeã tem 5 pontos obtidos com 1 vitória e 2 empates.*

  Neste caso, duas das três equipes restantes obtiveram um ponto contra a campeã. As possibilidades são, portanto, 9 ao todo:

$$(5,5,5,0); (5,5,4,1); (5,5,3,2); (5,4,4,2); (5,5,3,1); (5,5,2,2); (5,4,3,2); (5,4,4,3); (5,3,3,2).$$

- *A campeã tem 4 pontos obtidos com 1 vitória e 1 empate.*

  Neste caso, uma das três equipes restantes obteve três pontos contra a campeã e outra obteve um ponto contra a campeã . As possibilidades são, portanto, 2 ao todo:

$$(4,4,4,4); (4,4,4,3).$$

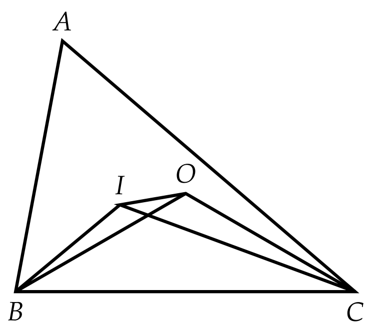
- *A campeã tem 3 pontos obtidos com 3 empates.*

  Há uma única possibildade: $(3,3,3,3)$.

São, portanto, $7 + 14 + 7 + 9 + 2 + 1 = 40$ possibilidades.

---

15. *Alternativa D*



Temos $\angle ICO = \angle OCB - \angle ICB = 90^\circ - A - \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A$. Assim,

$$\angle COI = 180^\circ - \angle ICO - \angle OIC = 180^\circ - \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A = 180^\circ - \frac{1}{2}B.$$

Portanto $BIOC$ é inscritível e

$$\angle OBC = \angle OIC \iff 90^\circ - A = \frac{1}{2}A \iff A = 60^\circ.$$

Soluções – Respostas numéricas

16. *Resposta:* 0090

As somas de 2023 algarismos não nulos está entre $2023 \cdot 1$ (2023 uns) e $2023 \cdot 9$ (2023 noves). Como $2023 = 45^2 - 2 \iff 2023 \cdot 9 = 9 \cdot 45^2 - 18 = (3 \cdot 45)^2 - 18$,

$$44^2 < 2023 < 45^2 < (3 \cdot 45 - 1)^2 < 2023 \cdot 9 < (3 \cdot 45)^2,$$

e há $(3 \cdot 45 - 1) - 45 + 1 = 90$ possíveis somas de dígitos de números perfeitosos.

---

17. *Resposta:* 0512

Considere cada coluna do tabuleiro. Cada quadrado da primeira coluna pode ser pintada de verde ou amarelo, de modo que há $2 \cdot 2 = 4$ possibilidades para pintar essa coluna. Para cada coluna subsequente:

- Se a coluna anterior tem quadrados com a mesma cor, deve-se pintar a próxima coluna com duas cores diferentes, o que pode ser feito de duas maneiras (decidimos qual quadrado fica de cada cor).
- Se a coluna anterior tem quadrados com cores diferentes, a próxima coluna deve ter duas cores iguais. Há duas escolhas: a cor a ser utilizada.

Assim, independentemente da situação, cada uma das próximas $8 - 1 = 7$ colunas pode ser pintada de duas maneiras, e há $4 \cdot 2^7 = 512$ possíveis pinturas.

---

18. *Resposta:* 2000

Se partes de lados não se sobrepõem, cada lado de cada polígono intersecta o outro polígono em no máximo dois pontos, pois cada polígono é convexo, e uma reta pode entrar e sair do polígono exatamente uma vez. Assim, há no máximo $\min(2 \cdot 1000, 2 \cdot 2023) = 2000$ pontos verdes.

Um exemplo é Q ser um polígono regular de 1000 lados inscrito em um círculo e P ser um polígono convexo cujos vértices são os 1000 pontos médios dos arcos determinados por Q no círculo e os demais 1023 pontos são escolhidos arbitrariamente sobre o círculo, de modo que nenhum dos 1023 coincide com os 2000 demais.

---

19. *Resposta:* 0041

Primeiro note que 101 é primo, e portanto tem mdc igual a 1 com todos os números menores do que ele.

Se $n < 41$, então 41 não divide $n!$ e $101^{n!} - 1$ não é múltiplo de 83, pois 83 é primo e se $101^t \equiv 1 \pmod{83}$ com $t > 0$ mínimo, t divide $83 - 1 = 82 = 2 \cdot 41$, ou seja, $t \in \{1, 2, 41, 82\}$. Como $101^1 - 1 = 100$ e $101^2 - 1 = 100 \cdot 102$ não são múltiplos de 83, $t > 2$, ou seja, t precisa ser múltiplo de 41. Logo 41 divide $n!$, e $n \ge 41$.

Se $n = 41$, $n!$ é divisível por $p^{\alpha-1}(p-1)$ para $p \le 41$ e $p^\alpha < 101$. De fato:

- Para $10 < p \le 41$ temos $\alpha = 1$ e $p - 1$ é um dos fatores de $n!$.
- Para $p \in \{5, 7\}$, $\alpha \le 2$ e $p^{\alpha-1}(p-1)$ é divisor de $5 \cdot 4 = 20$ ou $7 \cdot 6 = 42$, que são ambos fator de $41!$.
- Para $p = 3$, $\alpha \le 4$ e $p^{\alpha-1}(p-1)$ é divisor de $54 = 6 \cdot 9$, que é fator de $41!$.
- Para $p = 2$, $\alpha \le 6$ e $p^{\alpha-1}(p-1)$ é divisor de 32, que é fator de $41!$.

Assim, pelo teorema de Euler-Fermat, em todos esses casos p^α divide $101^{41!} - 1$, pois $41!$ é múltiplo de $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$.

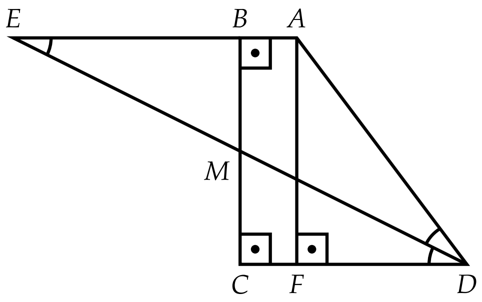
Se $p \le 83$, $p - 1$ é par e $\frac{p-1}{2} \le 41$, de modo que $p - 1$ é fator de $41!$, ou seja, $101^{41!} - 1$ é múltiplo de 83.

Falta testar somente $p = 89$ e $p = 97$. Nesses casos $p - 1 \in \{88, 96\} = \{8 \cdot 11, 8 \cdot 12\}$, que são fatores de $41!$ também. Logo $101^{41!} - 1$ é múltiplo de todo p^α, $p^\alpha < 101$. Com isso, também é múltiplo de qualquer produto dessas potências de primos, o que inclui em particular todos os compostos menores do que 101. Deste modo, $101^{41!} - 1$ é múltiplo de todo inteiro entre 1 e 100.

---

20. *Resposta:* 0312

Prolongue AB por B e a bissetriz de $\angle ADC$, obtendo em sua interseção o ponto E, e seja M o ponto médio de BC.



Como $BM = CM$, $\angle MBE = \angle MCD$ (retos) e $\angle BME = \angle CMD$, pelo caso ALA os triângulos MBE e MCD são congruentes. Logo $BE = CD$.

Sendo AE e CD paralelos e DE bissetriz, $\angle AED = \angle EDC = \angle ADE$. Logo o triângulo ADE é isósceles, e $AD = AE = AB + BE = AB + CD$.

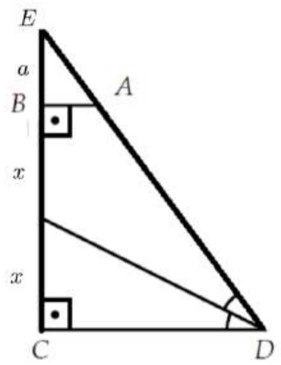
Portanto, no triângulo retângulo AFD,

$$AF^2 + FD^2 = AD^2 \iff BC^2 + (CD - AB)^2 = (AB + CD)^2 \iff BC = 2\sqrt{AB \cdot CD}.$$

Substituindo os valores de AB e CD, obtemos

$$BC = 2\sqrt{104 \cdot 234} = 2\sqrt{4 \cdot 26 \cdot 2 \cdot 117} = 4\sqrt{4 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 9} = 4 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 3 = 3 \cdot 104 = 312.$$

Outra Solução: Seja $BC = 2x$. A bissetriz do vértice D forma dois segmentos de tamanho x. Seja E o ponto de encontro das retas DA e CB e seja $EB = a$.



Os triângulos EBA e ECD são semelhantes por AA e $\frac{a}{104} = \frac{a+2x}{234} = \frac{2x}{130} = \frac{x}{65}$ implicando $a = \frac{104x}{65}$.
Podemos usar o Teorema da Bissetriz Interna no triângulo ECD para obter $\frac{ED}{DC} = \frac{\frac{104x}{65}+x}{x} \Leftrightarrow ED = \frac{104+65}{65} \cdot DC = \frac{13}{5} \cdot 234$.
Isso nos permite concluir que o triângulo retângulo ECD é semelhante ao triângulo de lados $(5, 12, 13)$ e $EC = \frac{12}{5} \cdot 234$. Substituindo a expressão de EC usando x temos $\frac{104x}{65} + 2x = \frac{12}{5} \cdot 234 \Leftrightarrow \frac{234x}{65} = \frac{12}{5} \cdot 234 \Leftrightarrow x = 12 \cdot 13 = 156$.
Dessa forma, $BC = 2x = 312$.