PRIMEIRO DIA

7 de agosto de 2023

Problema 1.
Uma lista de n números inteiros positivos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ é dita *buena* caso se verifique simultaneamente:

- $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$,
- $a_1 + a_2^2 + a_3^3 + \ldots + a_n^n \leq 2023$.

Para cada $n \geq 1$, determine quantas listas buenas de n números existem.

Observação: $a_k^k = \underbrace{a_k \cdot a_k \cdot \ldots \cdot a_k}_{k \text{ vezes}}$.

Problema 2.
Um plano é quadriculado em um tabuleiro infinito. Em cada casa deste tabuleiro há uma lâmpada, inicialmente apagada. Uma operação permitida consiste em escolher um quadrado de 3×3, 4×4 ou 5×5 casas e trocar de estado todas as lâmpadas desse quadrado (as que estão apagadas se tornam acessas e as que estão acessas se tornam apagadas).

(a) Prove que para qualquer conjunto finito de lâmpadas é possível, mediante uma sequência finita de operações permitidas, que essas sejam as únicas lâmpadas acessas do tabuleiro.

(b) Prove que se em uma sequência de operações permitidas só se usar dois dos três tamanhos de quadrados, então é impossível que ao final as únicas lâmpadas acessas do tabuleiro sejam as de um quadrado de 2×2 casas.

Problema 3.
Em um semiplano, delimitado por uma reta r, temos triângulos equiláteros $S_1, S_2, \ldots, S_n$ cada um deles com um lado paralelo a r, e cujo vértice oposto é o ponto do triângulo mais distante a r.
Para cada triângulo S_i, seja T_i seu triângulo medial. Sejam S a região coberta pelos triângulos $S_1, S_2, \ldots, S_n$ e T a região coberta pelos triângulos $T_1, T_2, \ldots, T_n$.
Prove que

$$\text{área}(S) \leq 4 \cdot \text{área}(T).$$

Observação: O triângulo medial de um triângulo ABC é aquele cujos vértices são os pontos médios dos lados AB, BC e CA.

Duração da prova: 4 horas
Cada problema vale 10 pontos

SEGUNDO DIA
8 de agosto de 2023

Problema 4.
Consideramos a sequência de números inteiros definida por $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, e para cada $n \geq 2$, a_{n+1} é o maior divisor primo de $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.
Calcule a_{100}.

Problema 5.
Sejam ABC um triângulo acutângulo e D, E, F os pontos médios de BC, CA, AB, respectivamente. A circunferência de diâmetro AD intersecta pela segunda vez as retas AB e AC nos pontos P e Q, respectivamente. A paralela a reta BC por P intersecta DE no ponto R e a paralela a reta BC por Q intersecta DF no ponto S. A circunferência circunscrita de DPR intersecta novamente AB em X, a circunferência circunscrita de DQS intersecta novamente AC em Y, e estas duas circunferências se intersectam novamente no ponto Z. Prove que Z é o ponto médio de XY.

Problema 6.
Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais positivos. Para cada inteiro positivo k, seja

$$S_k = {x_1}^k + {x_2}^k + \ldots + {x_n}^k.$$

(a) Prove que se $S_1 < S_2$ então a sequência $S_1, S_2, S_3, \ldots$ é estritamente crescente.

(b) Prove que existem n e números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tais que $S_1 > S_2$ e a sequência $S_1, S_2, S_3, \ldots$ não é estritamente decrescente.

Duração da prova: 4 horas
Cada problema vale 10 pontos