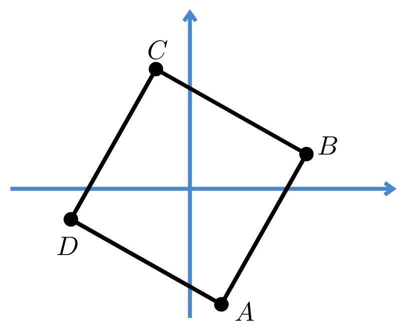
4^a Competição Elon Lages Lima de Matemática
27 de Agosto de 2023

1. No plano complexo (plano de Argand-Gauss) um quadrato $ABCD$ tem centro no ponto $z = 0$.



Se o vértice A encontra-se no afixo do número complexo z_1, podemos afirmar que o baricentro do triângulo ABC encontra-se no afixo do número complexo:

A) $z_1(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi)$

B) $\dfrac{z_1}{3}(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi)$

C) $z_1(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{2})$

D) $\dfrac{z_1}{3}(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{2})$

E) $\dfrac{z_1}{6}(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{3})$

Resposta: D

2. Se m e n são inteiros positivos tais que $m = 6^n - 7771$. Se m é primo, podemos afirmar que:

A) $m = n$.

B) $m = n + 5$.

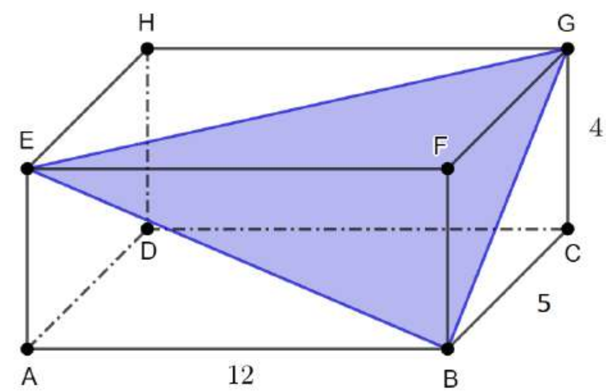
C) $m = n + 7$.

D) $m = n + 11$.

E) $m = n + 13$.

Resposta: A

3. Na figura abaixo representamos um triângulo cujos vértices são os vértices B, E e G do paralelepípedo retângulo $ABCDEFGH$ de dimensões (em cm) são $12, 5$ e 4.



A distância entre o ponto D e o ponto de interseção do segmento DF com plano α que contém o triângulo BEG é igual a:

A) $\sqrt{286}$.

B) $\frac{3}{4}\sqrt{286}$.

C) $\frac{1}{3}\sqrt{740}$.

D) $\frac{3}{5}\sqrt{470}$.

E) $\frac{5}{6}\sqrt{258}$.

Resposta: C

4. Qual o número de pares ordenados (a, b) de inteiros positivos a, b tais que as seguintes condições sejam simultaneamente satisfeitas?

(i) $a \mid 6000$;

(ii) $1 \leq b \leq \frac{6000}{a}$;

(ii) $\mathrm{mdc}(a, b, \frac{6000}{a}) = 1.$

A) 10600

B) 12400

C) 12000

D) 15800

E) 14400

Resposta: E

5. Seja $r(x)$ o polinômio que é o resto na divisão de x^{2050} por $x^5 + x^2 + 1$. Quantos coeficientes ímpares possui $r(x)$?

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

Resposta: B

6. Considere a família de parábolas

$$\mathcal{F}_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + 2ax + a, a \in \mathbb{R}\}$$

Com respeito às família $\mathcal{F}_a$, quando a percorre o conjunto dos números reais, podemos afirmar que:

A) Não existe nenhum ponto que seja comum à todas as parábolas da família $\mathcal{F}_a$.

B) Os vértices de todas as parábolas de $\mathcal{F}_a$ pertencem à parábola de equação $y = -x^2$.

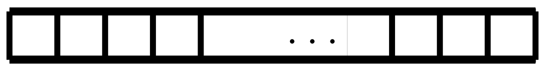
C) O ponto $P = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ é o único ponto comum à todas as parábolas da família $\mathcal{F}_a$.

D) Para cada $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathcal{F}_{-a}$ é uma família parábolas que são simétricas em relação à origem das palábolas que compõem À família $\mathcal{F}_a$.

E) Os vértices de todas as parábolas de $\mathcal{F}_a$ pertencem à parábola de equação $y = -x^2 - x$.

Resposta: E

7. De quantas maneiras distintas é possível pintar as casas de um tabuleiro 1×2023, sendo que cada casa pode ter exatamente uma entre 3 cores distintas? (Duas configurações são consideradas idênticas se uma puder ser obtida a partir da outra por uma sobreposição através de um movimento de rotação do tabuleiro no plano em que ele está desenhado).



A) 2023^3

B) 3^{2023}

C) $\dfrac{3^{2023}+3^{1012}}{2}$

D) $\dfrac{3^{2023}+3^{1012}}{7}$

E) $\dfrac{3^{2023}+3^{1012}}{2023}$

Resposta: C

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)(2-f(x)) = 1$, então $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ é igual a

A) 1

B) 2

C) $\dfrac{1}{2}$

D) $\dfrac{3}{4}$

E) $\dfrac{1}{5}$

Resposta: A

9. Se $a, b \in \mathbb{R}^+$, podemos afirmar que $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$ é igual a:

A) ab.

B) $\dfrac{a}{b}$.

C) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

D) $\sqrt{ab}$.

E) $\dfrac{a+b}{2}$.

Resposta: D

10. Sejam α e β são as raízes distintas da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Então $\lim_{x \to \alpha} \dfrac{1 - cos(ax^2 + bx + c)}{(x - \alpha)^2}$ é igual a:

A) 0.

B) $\dfrac{a^2}{2}(\alpha - \beta)^2$.

C) $\dfrac{1}{2}(\alpha - \beta)^2$.

D) $-\dfrac{a^2}{2}(\alpha - \beta)^2$.

E) 1.

Resposta: B

11. O limite $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \left[\log_3 2 - \log_3 (2 + x)\right]$ é igual a:

A) $-\dfrac{1}{\ln 9}$.

B) 1.

C) 0.

D) $\ln 3$.

E) $-\dfrac{3}{4}$.

Resposta: A

12. Sejam n um inteiro positivo e $f(n) = 4^{5^n} + 5^{4^n}$. Com respeito a $f(n)$ podemos afirmar que:

A) Existem infinitos valores n para os quais $f(n)$ resulta em um número primo.

B) $f(n)$ sempre resulta em um número primo para $n > 2023$.

C) Não existem valores para n de modo que $f(n)$ seja um número primo.

D) Para $n \in \{2023, 2024, \ldots, 2030\}$ sempre resulta que $f(n)$ é um número primo.

E) Existem 2023 valores consecutivos de p para os quais $f(n)$ resulta num número primo.

Resposta: C

13. Com as letras **E, L , O, N** vamos formar sequências de 2023 letras de modo que não hajam duas letras E consecutivas. A quantidade dessas sequências é:

A) $\left(\dfrac{63-15\sqrt{21}}{126}\right)(\dfrac{3-\sqrt{21}}{2})^{2023}+\left(\dfrac{63+15\sqrt{21}}{126}\right)(\dfrac{3+\sqrt{21}}{2})^{2023}$

B) $\left(\dfrac{-63-15\sqrt{21}}{126}\right)(\dfrac{3-\sqrt{21}}{2})^{2023}+\left(\dfrac{-63+15\sqrt{21}}{126}\right)(\dfrac{3+\sqrt{21}}{2})^{2023}$

C) $\left(\dfrac{42-15\sqrt{21}}{126}\right)(\dfrac{3-\sqrt{21}}{2})^{2023}+\left(\dfrac{42+15\sqrt{21}}{126}\right)(\dfrac{3+\sqrt{21}}{2})^{2023}$

D) $\left(\dfrac{-31+5\sqrt{29}}{42}\right)(7-\sqrt{17})^{2023}+\left(\dfrac{31+5\sqrt{29}}{42}\right)(7+\sqrt{17})^{2023}$

E) $\left(\dfrac{-19+5\sqrt{23}}{21}\right)(5-\sqrt{19})^{2023}+\left(\dfrac{19+5\sqrt{23}}{21}\right)(5+\sqrt{19})^{2023}$

Resposta: A

14. Considere a recursão dada por

$$a_0 = 2,\ a_1 = 4, \quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n \text{ para } n \geq 0$$

Então a_n **nunca** é múltiplo de

A) 13

B) 17

C) 31

D) 79

E) 97

Resposta: B

15. Sejam $A, B \in M(2,\mathbb{R})$ (Matrizes reais de ordem 2). Com relação a matriz $(AB-BA)^2$, podemos afirmar que: (Considere que 0 e I representam as matrizes nula e identidade de ordem 2, respectivamente).

A) $(AB-BA)^2 = 0$

B) $(AB-BA)^2 = I$

C) $(AB-BA)^2 = -\det(AB-BA).I$

D) $(AB-BA)^2 = -\det(A+B).I$

E) $(AB-BA)^2 = -\det(A-B).I$

Resposta: C

16. Seja $E = \mathbb{R}_n[X]$ o espaço vetorial dos polinômios na variável X, coeficientes reais e de grau menor do que ou igual a n. Definindo a aplicação

$$\begin{aligned} &\Phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ &P \mapsto \Phi(P) = (X-1).P'(x) \end{aligned}$$

onde $P'(X)$ representa da derivada do polinômio $P(X)$ em relação à variável X. Se $\alpha = \{1, X, X^2, \ldots, X^{n-1}\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}$-espaço vetorial E, podemos afirmar que:

A) Φ é diagonalizável.

B) Os autovalores de Φ pertencem ao conjunto $\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$.

C) $\det(\Phi) = n^2$.

D) $\{X, X-1, (X-1)^2, \ldots, (X-1)^n\}$ são autovetores de Φ.

E) A matriz do operador Φ em relação à base α é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & & 0 \\ & 1 & -1 & & & & \\ & & 2 & \ddots & & & \\ & & & \ddots & -1 & & \\ & & & & k & \ddots & \\ & & & & & \ddots & -1 \\ 0 & & & & & & n \end{bmatrix}$$

Resposta: A

17. Denote por $R_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a rotação do plano $\mathbb{R}^2$ no sentido anti-horário com centro na origem $(0,0)$ e ângulo θ e por $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a reflexão com relação ao eixo y. Então a composição

$$R_{30^\circ} \circ S \circ R_{60^\circ} \circ S \circ S \circ S \circ R_{15^\circ} \circ S \circ R_{45^\circ}$$

é uma

A) rotação R_{45°

B) reflexão com relação à reta $y = x$

C) reflexão com relação à reta $y = x\sqrt{3}$

D) rotação R_{-45°

E) reflexão com relação à reta $y = x + 1$

Resposta: C

18. Sejam $M(n\times n,\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes de ordem n com entradas reais e

$$\mathbb{B} := \{A \in M(n\times n,\mathbb{R})\ ;\ a_{ij} \in \{-1,1\},\ \forall\ 1 \le i,j \le n\}.$$

Se $S = \sum_{A\in\mathbb{B}} \det(A)$, podemos afirmar que:

A) $S = -1$.

B) $S = 1$.

C) $S = 0$.

D) $S = 2^n$.

E) $S = \dfrac{n}{2}$.

Resposta: C

19. Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. Uma transformação linear $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma *projeção* de $\mathbb{R}^3$ sobre V se ela satisfaz $P^2 = P$ e a imagem de P é V. Se $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é a transformação linear dada na base canônica pela matriz

$$\begin{pmatrix} 5 & 28 & -19 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

então qual das alternativas a seguir é uma projeção de $\mathbb{R}^3$ sobre o subespaço gerado pelo vetor $(1,2,3)$? Aqui I denota a identidade.

A) $P = -15I + 8T - T^2$

B) $P = -11I + 7T - T^2$

C) $P = -10I + 6T - T^2$

D) $P = -4I + 5T - T^2$

E) $P = -I + 12T - T^2$

Resposta: A

20. A integral definida $\int_0^1 \frac{x^e e^x}{x}(e+x)dx$ é igual a:

A) 1.

B) $\ln 2$.

C) e.

D) $\frac{1}{e}$.

E) 2^e.

Resposta: C

21. Com respeito a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, onde $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} senx dx$, podemos afirmar que:

A) É convergente e sua soma é $\frac{1}{2}$

B) É convergente e sua soma é $\frac{1}{4}$

C) É convergente e sua soma é $\frac{3}{2}$

D) É convergente e sua soma é $\frac{3}{5}$

E) É divergente.

Resposta: A

22. Considere a seguinte equação diferencial

$$y''(t) - 13y'(t) + 30y(t) = 0, \qquad y(0) = 2, \ y'(0) = 13$$

Se $y^{(n)}(t)$ denota a n-ésima derivada de $y(t)$, qual o valor de $y^{(100)}(0)$?

A) $100^{30} + 100^{13}$

B) $3^{100} + 10^{100}$

C) $100^{10} + 100^{3}$

D) $13^{100} + 30^{100}$

E) 100

Resposta: B

23. Uma capivara se locomove às margens de um rio, que estão cobertas de lama. A lama fica mais pegajosa quanto mais próxima do rio, de modo que a cada instante a velocidade da capivara é diretamente proporcional à sua distância ao rio. Suponha que, num modelo no plano $\mathbb{R}^2$, o rio se encontra sobre o eixo x e que a capivara quer ir do ponto $(0,2)$ ao ponto $(1,\sqrt{3})$ utilizando um de dois trajetos, o primeiro em linha reta L, e o segundo seguindo o arco C de circunferência com centro na origem $(0,0)$ que liga os dois pontos. A razão entre os tempos gastos para percorrer os trajetos L e C, nesta ordem, é

A) $\sqrt{3}$

B) $(\sqrt{2}+\sqrt{6})\cdot\log_3(4/3)$

C) $2\sqrt{2}+\ln(3)$

D) $\ln(3)+\sqrt{3}$

E) $\sqrt{3}\cdot\ln(2)$

Resposta: B

24. Considere um polígono regular com 2023 lados de comprimento 2 e sejam $P_1,\ldots,P_{2023}$ seus vértices. Seja Q um ponto que está a uma distância 1000 do centro deste polígono. Então a soma $QP_1^2+QP_2^2+\cdots+QP_{2023}^2$ é igual a

A) depende da posição do ponto Q

B) $2023\cdot(1000^2+\operatorname{cossec}^2\dfrac{\pi}{2023})$

C) $2023\cdot(1000^2+\cos^2\dfrac{\pi}{2023})$

D) $2023\cdot(1000+\cos\dfrac{2\pi}{2023})$

E) $2023\cdot(1000+\sec\dfrac{2\pi}{2023})$

Resposta: B

25. Considere duas moedas A e B tais que na moeda A a probabilidade de sair cara é $\dfrac{1}{4}$, enquanto que na moeda B a probabilidade de sair cara é $\dfrac{1}{2}$. Escolhe-se uma dessas duas moedas ao caso e a arremessa. Se sair cara essa mesma moeda será arremessada novamente, caso contrário será arremessada a outra moeda. Para cada inteiro positivo n, seja p_n a probabilidade de que a moeda lançada no n-ésimo arremesso seja a moeda A. Podemos afirmar que:

A) $p_n = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{10}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

B) $p_n = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{10}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

C) $p_n = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

D) $p_n = \dfrac{1}{10}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

E) $p_n = -\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{10}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

Resposta: B