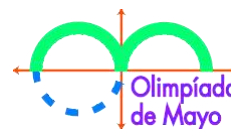


XXIX^a OLIMPIÁDA de MAIO
Primeiro Nível
Maio de 2023



Duração da prova: 3 horas.

Cada problema vale 10 pontos.

Não é permitido o uso de calculadora; não é permitida consulta de qualquer tipo. Justifique cada uma de suas respostas.

Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 30 de maio de 2023.

PROBLEMA 1

Juanita escreveu os números de 1 a 13, calculou a soma de todos os dígitos escritos e obteve

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + (1 + 0) + (1 + 1) + (1 + 2) + (1 + 3) = 55.$$

Seu irmão Ariel escreveu os números de 1 a 100 e calculou a soma de todos os dígitos escritos.

Achar o valor da soma de Ariel.

PROBLEMA 2

Dizemos que um número de quatro dígitos $abcd$ é *cabuloso* se o número $a^4 + b^3 + c^2 + d$ é igual ao número de dois dígitos cd . Por exemplo, 2023 é cabuloso, pois $2^4 + 0^3 + 2^2 + 3 = 16 + 0 + 4 + 3 = 23$.

Quantos números *cabulosos* existem?

Observação: a^4 é o resultado de multiplicar 4 vezes o número a , por exemplo $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

PROBLEMA 3

Sobre uma reta l há quatro pontos A, B, C, D , nesta ordem, tais que $AB = BC = CD$.

Escolhe-se um ponto E fora da reta l de modo que, ao traçar os segmentos EB e EC , forma-se um triângulo equilátero EBC . Então, traçam-se os segmentos EA e ED e escolhe-se um ponto F de modo que, ao traçar os segmentos FA e FE , forma-se um triângulo equilátero FAE exterior ao triângulo EAD . Por último, traçam-se as retas EB e FA , que se cortam no ponto G . Se a área do triângulo EBD é 10, calcular a área do triângulo EFG .

PROBLEMA 4

Tem-se um tabuleiro de três linhas e 2023 colunas. Na primeira linha estão escritos os números de 1 até 2023, em ordem crescente. O diabo dos números escreve esses mesmos números nas casas da segunda linha, mas ordenados à sua escolha. Depois, em cada casa da terceira linha escreve a diferença entre os dois números já escritos em sua mesma coluna (o maior menos o menor). Por exemplo, se nas primeiras duas casas de uma coluna estão os números 21 e 198, na terceira casa escreve-se $198 - 21 = 177$.

Explicar por que, independentemente de como foi preenchida pelo diabo a segunda linha do tabuleiro, o produto dos 2023 números da terceira linha nunca será ímpar.

PROBLEMA 5

Tem-se 100 caixas etiquetadas com os números 00, 01, 02, ..., 99. Em mil cartões foram escritos os números 000, 001, 002, ..., 999, um número em cada cartão.

É permitido colocar um cartão em uma caixa se o número da caixa pode ser obtido ao eliminar-se um dos dígitos do número do cartão, mantendo a ordem. Por exemplo, é permitido colocar o cartão 037 na caixa 07, mas não é permitido colocar o cartão 156 na caixa 65.

É possível que, logo após colocar todos os cartões nas caixas, haja exatamente 50 caixas vazias? Se a resposta é sim, indicar como se colocam os cartões nas caixas; se a resposta é não, explicar por que é impossível.

XXIX^a OLIMPÍADA de MAIO
Segundo Nível
Maio de 2023



Duração da prova: 3 horas.

Cada problema vale 10 pontos.

Não é permitido o uso de calculadora; não é permitida consulta de qualquer tipo. Justifique cada uma de suas respostas.

Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 30 de maio de 2023.

PROBLEMA 1

No dia de Páscoa, 4 meninos e suas mães participaram de um jogo no qual tinham que encontrar ovos de chocolate que estavam escondidos. Agustín encontrou 4 ovos, Bruno encontrou 6, Carlos encontrou 9 e Daniel encontrou 12.

A senhora Gómez encontrou a mesma quantidade de ovos que seu filho, a senhora Junco encontrou o dobro de ovos da quantidade encontrada pelo seu filho, a senhora Messi encontrou o triplo de ovos da quantidade encontrada pelo seu filho e a senhora Núñez encontrou o quádruplo de ovos da quantidade encontrada pelo seu filho.

Ao final do dia, todos os ovos foram guardados em caixas, com 18 ovos em cada caixa, e sobrou somente um ovo. Determinar quem é a mãe de cada menino.

PROBLEMA 2

Sejam a, b, c, d, e inteiros positivos tais que $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ y $a + b + c + d + e = 1002$.

- Determinar o maior valor possível de $a + c + e$.
- Determinar o menor valor possível de $a + c + e$.

PROBLEMA 3

Em um quadro estão escritos os 49 números $2, 3, 4, \dots, 49, 50$. Uma operação permitida consiste em escolher os dois números distintos a e b do quadro tais que a seja múltiplo de b e apagar exatamente um dos dois.

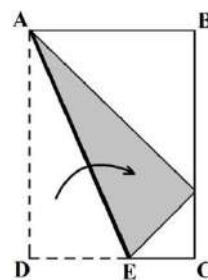
María realiza uma sequência de operações permitidas até observar que já não é possível fazer nenhuma mais. Determinar a quantidade mínima de números que podem restar no quadro nesse momento.

PROBLEMA 4

Matías tem uma folha de papel retangular $ABCD$, com $AB < AD$. Inicialmente, ele dobra a folha ao longo de uma reta AE , onde E é um ponto sobre o lado DC , de modo que o vértice D fique sobre o lado BC , como mostra a figura.

Ele dobra novamente a folha ao longo de uma reta AF , onde F é um ponto sobre o lado BC , de modo que o vértice B fique sobre a reta AE ; e finalmente dobra a folha ao longo da reta EF .

Matías observou que os vértices B e C ficaram localizados sobre um mesmo ponto do segmento AE depois de fazer todas as dobras descritas. Calcular a medida do ângulo $D\hat{A}E$.



PROBLEMA 5

Sobre uma mesa há 50 pilhas de moedas com $1, 2, 3, \dots, 50$ moedas, respectivamente. Ana e Beto jogam o seguinte jogo por turnos: primeiro, Ana escolhe uma das 50 pilhas da mesa, e Beto decide se essa pilha é para Ana ou para ele. Depois, Beto escolhe uma das 49 pilhas restantes da mesa, e Ana decide se essa pilha é para ela ou para Beto. Eles continuam jogando alternadamente desta maneira até que um dos jogadores tenha 25 pilhas. Quando isso ocorre, o outro jogador pega todas as pilhas restantes da mesa e quem tem mais moedas ganha.

Determinar qual dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora.