Primeiro dia

8 de setembro de 2023

Problema 1. Determine todos os pares de reais positivos (a, b) com $a < b$ tais que a seguinte série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \{x\}^k \, dx = \int_a^b \{x\} \, dx + \int_a^b \{x\}^2 \, dx + \int_a^b \{x\}^3 \, dx + \cdots$$

seja convergente e determine seu valor em função de a e b.

Nota: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ denota a parte fracionária de x.

Problema 2. Um fabricante de brinquedos tem à sua disposição k dados, cada um com 6 faces em branco. Sobre cada face de cada um desses dados o fabricante deve desenhar um dos dígitos $0, 1, 2, \ldots, 9$.

Determine (em função de k) o maior inteiro n tal que o fabricante possa desenhar dígitos nos k dados de modo que, para qualquer inteiro positivo $r \leq n$, seja possível escolher alguns dos k dados e formar com eles a representação decimal de r.

Nota: Os dígitos 6 e 9 são distinguíveis: aparecem como $\underline{6}$ e $\underline{9}$.

Problema 3. Dada uma matriz A real simétrica 3×3, definimos $f(A)$ como uma matriz 3×3 com os mesmos autovetores de A tal que se A tem autovalores a, b, c, então $f(A)$ tem autovalores $b+c, c+a, a+b$ (nessa ordem). Definimos uma sequência de matrizes reais simétricas $A_0, A_1, A_2, \ldots$ 3×3 tais que $A_{n+1} = f(A_n)$ para $n \geq 0$. Se a matriz A_0 não tem nenhuma entrada nula, determine o número máximo de índices $j \geq 0$ para os quais a matriz A_j tem alguma entrada nula.

Cada problema vale 10 pontos
Tempo máximo: 4h 30m.

Segundo dia

9 de setembro de 2023

Problema 4. Para um inteiro positivo n, $\sigma(n)$ denota a soma dos divisores positivos de n. Determine

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma(n^{2023})}{(\sigma(n))^{2023}}$$

Nota: Dada uma sequência (a_n) de números reais, dizemos que $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$ se (a_n) não é limitada superiormente, e, caso contrario, $\limsup_{n\to\infty} a_n$ é a menor constante C tal que, para todo real $K > C$, existe um inteiro positivo N com $a_n < K$ para todo $n > N$.

Problema 5. Dado um inteiro positivo $k > 1$, determine todos os inteiros positivos n tais que o polinômio

$$P(z) = z^n + \sum_{j=0}^{2^k-2} z^j = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{2^k-2} + z^n$$

tem uma raiz complexa w tal que $|w| = 1$.

Problema 6. Seja n um inteiro positivo. Definimos $f(n)$ como o número de sequências finitas $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ de inteiros positivos tais que $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_k$ e

$$a_1 + a_2^2 + a_3^3 + \cdots + a_k^k \leq n.$$

Determine α e C constantes positivas tais que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^\alpha} = C.$$

Cada problema vale 10 pontos
Tempo máximo: 4h 30m.