XXXVIII OLIMPÍADA IBERO-AMERICANA DE MATEMÁTICA

Português, Dia 1

Sexta-feira, 8 de setembro de 2023

Problema 1. Seja n um inteiro positivo. Realizam-se as 35 multiplicações:

$$1 \cdot n, \; 2 \cdot n, \; \ldots, \; 35 \cdot n$$

Demonstre que em algum destes resultados aparece ao menos uma vez o dígito 7.

Problema 2. Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos inteiros. Encontre todas as funções $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que:

$$2023f(f(x)) + 2022x^2 = 2022f(x) + 2023[f(x)]^2 + 1$$

para todo inteiro x.

Problema 3. Ana e Beto jogam com uma balança de dois pratos. Há 2023 caixas etiquetadas com seus pesos, que são os números $1, \; 2, \ldots, \; 2023$, sem repetição. Cada jogador, em seu turno, escolhe uma caixa que ainda não estava colocada na balança e a coloca no prato com menor peso no momento. Se a balança está em equilíbrio, a coloca em qualquer prato. Ana começa o jogo e seguem dessa maneira alternadamente até colocar todas as caixas. Ana ganha se, no final, a balança se encontra equilibrada. Caso contrário, Beto ganha. Determine qual dos jogadores tem uma estratégia ganhadora e descreva a estratégia.

Tempo: 4 horas e 30 minutos

Cada problema vale 7 pontos

Português, Dia 2

Sábado, 9 de setembro de 2023

Problema 4. Sejam B e C dois pontos fixos no plano. Para cada ponto A do plano, fora da reta BC, seja G o baricentro do triângulo ABC. Determine o lugar geométrico dos pontos A tais que $\angle BAC + \angle BGC = 180°$.

Nota: O lugar geométrico é o conjunto dos pontos do plano que satisfazem a propriedade.

Problema 5. Uma sequência $P_1, \ldots, P_n$ de pontos no plano (não necessariamente distintos) é *carioca* se existe uma permutação $a_1, \ldots, a_n$ dos números $1, \ldots, n$ para a qual os segmentos

$$P_{a_1}P_{a_2},\ P_{a_2}P_{a_3},\ \ldots,\ P_{a_n}P_{a_1}$$

têm todos o mesmo comprimento.

Determine o maior número k tal que para qualquer sequência de k pontos no plano é possível adicionar $2023 - k$ pontos de modo que a sequência de 2023 pontos seja carioca.

Problema 6. Seja P um polinômio de grau maior ou igual a 4 com coeficientes inteiros. Um inteiro positivo x chama-se P-*representável* se existem números inteiros a e b tais que $x = P(a) - P(b)$. Demonstre que, se para todo $N \geq 0$ mais da metade dos inteiros do conjunto $\{0, 1, \ldots, N\}$ são P-representáveis, então todos os inteiros pares são P-representáveis ou todos os inteiros ímpares são P-representáveis.

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos