45ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 1 (6º ou 7º ano)

1. Arnaldo e Bernaldo estão jogando tênis de mesa. Eles decidem fazer uma brincadeira usando os pontos do jogo e algumas jujubas. Ambos iniciam com 300 jujubas cada um. Após cada ponto, se Arnaldo perde, ele dá 2 jujubas para Bernaldo. Se ele ganha o ponto, recebe 3 jujubas de Bernaldo. (Parece injusto, né. Mas é assim.). Eles disputaram 100 pontos no total.

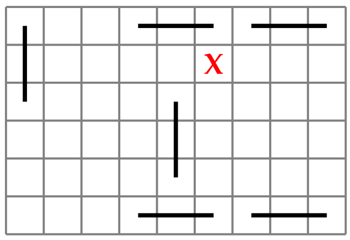
a) Supondo que Arnaldo ganhe 39 pontos e perca os outros, com quantas jujubas cada um terminará a brincadeira?

b) Se ambos acabarem a brincadeira com a quantidade inicial de 300 jujubas cada um, quantas partidas Arnaldo terá vencido?

c) É possível que Arnaldo termine com exatamente 301 jujubas?

Lembre-se de que você deve justificar todas as suas respostas.

2. A figura a seguir mostra um tabuleiro 6×9 dividido em quadradinhos 1×1 que deve ser coberto com peças 1×3 na horizontal ou na vertical de modo que cada peça cubra exatamente 3 quadradinhos. Já foram colocadas 4 peças na horizontal e 2 na vertical (as peças estão representadas de maneira simplificada).

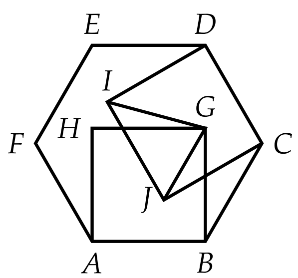


a) Quantas peças são necessárias para completar a cobertura acima?

b) Existe um quadradinho marcado com a letra **X**. Só existe uma posição possível de uma peça 1×3 para cobrir esse quadradinho de modo que seja possível completar o desenho e cobrir o tabuleiro totalmente. Indique onde essa peça deve ser colocada e explique o porquê dela ser a única possibilidade.

c) Existem quantas maneiras diferentes de completar a cobertura acima?

3. Seja $ABCDEF$ um hexágono regular (todos os lados possuem mesma medida e todos os ângulos internos medem 120°). No interior do hexágono são construídos os quadrados $ABGH$ e $CDIJ$.



a) Prove que C, G e I são colineares, ou seja, prove que $\angle BCG = \angle BCI$.

b) Determine as medidas em graus dos ângulos internos do triângulo GIJ.

4. Um número inteiro positivo é dito *vaivém* quando, considerando a sua representação na base dez, o primeiro algarismo da esquerda para a direita é maior que o segundo, o segundo é menor que o terceiro, o terceiro é maior que o quarto e assim por diante alternando maior e menor até o último algarismo. Por exemplo, 2021 é vaivém, pois $2 > 0$ e $0 < 2$ e $2 > 1$. O número 2023 não é vaivém, pois $2 > 0$ e $0 < 2$, mas 2 não é maior do que 3.

a) Existem quantos inteiros positivos vaivéns de 2000 até 2100?

b) Qual é o maior número vaivém sem algarismos repetidos?

c) Quantos números de 7 algarismos distintos formados pelos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 são vaivéns? Por exemplo, 4253617 é um destes números. Mas 5372146 não é (2 é maior do que 1 e 1 é menor do que 4) e 2163457 também não é (4 é menor do que 5).

---

5. Dados n pontos distintos no plano existem $\frac{n(n-1)}{2}$ pares de pontos. Encontre todos os inteiros positivos n, com $n \geq 3$, para os quais existe um conjunto de n pontos no plano tais que para cada inteiro d do conjunto $\left\{1, 2, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}\right\}$ existe um par de pontos com a distância igual a d.
Lembre-se que para os valores de n com essa propriedade é necessário mostrar um exemplo e para os valores de n que não têm a propriedade é preciso justificar por que o conjunto de pontos não existe.
