45^{a} OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 2 (8^{o} ou 9^{o} ano)

PRIMEIRO DIA

---

1. Um número inteiro positivo é dito *vaivém* quando, considerando a sua representação na base dez, o primeiro algarismo da esquerda para a direita é maior que o segundo, o segundo é menor que o terceiro, o terceiro é maior que o quarto e assim por diante alternando maior e menor até o último algarismo. Por exemplo, 2021 é vaivém, pois $2 > 0$ e $0 < 2$ e $2 > 1$. O número 2023 não é vaivém, pois $2 > 0$ e $0 < 2$, mas 2 não é maior do que 3.

a) Existem quantos inteiros positivos vaivéns de 2000 até 2100?

b) Qual é o maior número vaivém sem algarismos repetidos?

c) Quantos números de 7 algarismos distintos formados pelos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 são vaivéns? Por exemplo, 4253617 é um destes números. Mas 5372146 não é (2 é maior do que 1 e 1 é menor do que 4) e 2163457 também não é (4 é menor do que 5).

---

2. Considere um triângulo ABC com $AB < AC$ e sejam H e O seu ortocentro e circuncentro, respectivamente. Uma reta partindo de B corta as retas AO e AH em M e M' de modo que M' é ponto médio de BM. Outra reta partindo de C corta as retas AH e AO em N e N' de modo que N' é ponto médio de CN. Prove que M, M', N, N' estão sobre uma mesma circunferência.

---

3. Seja n um inteiro positivo. Mostre que existem inteiros $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *não todos iguais*, satisfazendo

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 0 \\ x_1 + x_2^2 + x_3 + \ldots + x_n = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3^2 + \ldots + x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n^2 = 0 \end{cases}$$

se, e somente se, $2n - 1$ é composto.

Nota: em cada linha há n termos e na k-ésima linha apenas o termo x_k está elevado ao quadrado.

45ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 2 (8º ou 9º ano)

SEGUNDO DIA

---

4. Determine o menor inteiro k para o qual existem inteiros positivos a, b e c, dois a dois distintos, tais que

$$a^2 = bc \quad \text{e} \quad k = 2b + 3c - a.$$

---

5. Um inteiro $n \geq 3$ é *fabuloso* quando existe um inteiro a com $2 \leq a \leq n - 1$ para o qual $a^n - a$ é divisível por n. Encontre todos os inteiros fabulosos.

---

6. Seja m um inteiro positivo com $m \leq 2024$. Ana e Banana jogam um jogo alternadamente em em um tabuleiro 1×2024, com quadrados inicialmente pintados de branco. Ana começa o jogo. Cada jogada de Ana consiste em escolher $k \leq m$ quadrados brancos quaisquer do tabuleiro e pintá-los todos de verde. Cada jogada de Banana consiste em escolher qualquer sequência de quadrados verdes consecutivos e pintá-los todos de branco. Qual é o menor valor de m para o qual Ana consegue garantir que, após alguma de suas jogadas, o tabuleiro inteiro estará pintado de verde?