45ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 3 (Ensino Médio)

PRIMEIRO DIA

Olimpíada Brasileira de Matemática

---

1. Exiba uma sequência infinita $a_1, a_2, \ldots$ de inteiros com ambas as seguintes propriedades:

- $a_i \neq 0$ para todo i inteiro positivo, ou seja, nenhum termo da sequência é igual a zero;
- para todo n inteiro positivo, $a_n + a_{2n} + \cdots + a_{2023n} = 0$.

Para ganhar pontos, você deve justificar por que sua sequência tem as duas propriedades acima.

---

2. Seja ABC um triângulo retângulo em B, com altura BT, T sobre a hipotenusa AC. Construa os triângulos equiláteros BTX e BTY de modo que X esteja no mesmo semiplano que A com relação a BT no e Y esteja no mesmo semiplano que C com relação a BT. O ponto P é a interseção de AY e CX. Prove que

$$PA \cdot BC = PB \cdot CA = PC \cdot AB.$$

---

3. Seja n um inteiro positivo. A humanidade vai começar a colonizar Marte. As agências SpaceY e SpaceZ serão as responsáveis por fazer as viagens entre os planetas. Para os foguetes não baterem, elas vão realizar viagens de forma alternada, sendo que a SpaceY fará a primeira viagem. Em cada viagem, a agência responsável realizará, conforme for possível, um entre dois tipos de missão:

(i) escolher um inteiro positivo k e levar k pessoas para Marte, criando uma nova colônia no planeta e estabelecendo-as nessa colônia;

(ii) escolher alguma colônia existente em Marte e um inteiro positivo k estritamente menor que a população dessa colônia, e trazer k pessoas dessa colônia de volta para a Terra.

Para manter a organização em Marte, uma missão não pode resultar em duas colônias com a mesma população e a quantidade de colônias deve ser no máximo n. A primeira agência que não puder realizar uma missão vai falir. Determine, em função de n, qual agência pode garantir que não falirá primeiro.

45ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível 3 (Ensino Médio)

SEGUNDO DIA

Olimpíada Brasileira de Matemática

---

4. Sejam x, y, z três números reais distintos tais que

$$\begin{cases} x^2 - x = yz \\ y^2 - y = zx \\ z^2 - z = xy \end{cases}.$$

Prove que $-\frac{1}{3} < x, y, z < 1$.

---

5. Seja m um inteiro positivo com $m \leq 2024$. Ana e Banana jogam um jogo alternadamente em em um tabuleiro 1×2024, com quadrados inicialmente pintados de branco. Ana começa o jogo. Cada jogada de Ana consiste em escolher $k \leq m$ quadrados brancos quaisquer do tabuleiro e pintá-los todos de verde. Cada jogada de Banana consiste em escolher qualquer sequência de quadrados verdes consecutivos e pintá-los todos de branco. Qual é o menor valor de m para o qual Ana consegue garantir que, após alguma de suas jogadas, o tabuleiro inteiro estará pintado de verde?

---

6. Para k inteiro positivo, seja $p(k)$ o menor primo que *não* divide k. Dado um inteiro positivo a, defina a sequência infinita $a_0, a_1, \ldots$ por $a_0 = a$ e, para $n > 0$, a_n é o menor inteiro positivo com as seguintes propriedades:

- a_n ainda não apareceu na sequência, ou seja, $a_n \neq a_i$ para $0 \leq i < n$;
- $(a_{n-1})^{a_n} - 1$ é múltiplo de $p(a_{n-1})$.

Prove que todo inteiro positivo aparece como termo da sequência, ou seja, para todo inteiro positivo m existe n tal que $a_n = m$.