45ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível Universitário

PRIMEIRO DIA

---

1. Seja p a *função potencioral*, dos inteiros positivos nos inteiros positivos, definida por $p(1) = 1$ e $p(n+1) = p(n)$, se $n+1$ não é uma potência perfeita e $p(n+1) = (n+1) \cdot p(n)$, caso contrário. Existe N inteiro positivo tal que, para todo $n > N$, $p(n) > 2^n$?

Obs.: Um inteiro n é uma *potência perfeita* se existem inteiros $a, b \geq 2$ tais que $n = a^b$.

---

2. Seja $a_n = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}, \forall n \geq 1$.

(a) Prove que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ converge para todo $x \in (-4, 4)$ e que a função $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ satisfaz a equação diferencial $x(x-4)f'(x) + (x+2)f(x) = -x$.

(b) Prove que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{27}$.

---

3. Prove que existe uma constante $C > 0$ tal que, para quaisquer números inteiros m, n com $n \geq m > 1$ e qualquer número real $x > 1$,

$$\sum_{k=m}^{n} \sqrt[k]{x} \leq C\left(\frac{m^2 \cdot \sqrt[m-1]{x}}{\log x} + n\right).$$

45ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fase Única – Nível Universitário

SEGUNDO DIA

Olimpíada Brasileira de Matemática

---

4. Seja $M_2(\mathbb{Z})$ o conjunto das matrizes 2×2 com entradas inteiras. Seja $A \in M_2(\mathbb{Z})$ tal que

$$A^2 + 5I = 0,$$

onde $I \in M_2(\mathbb{Z})$ e $0 \in M_2(\mathbb{Z})$ denotam as matrizes identidade e nula, respectivamente.
Prove que existe uma matriz inversível $C \in M_2(\mathbb{Z})$ com $C^{-1} \in M_2(\mathbb{Z})$ tal que

$$CAC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ ou } CAC^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

5. Um cavalo bêbado se move em um tabuleiro infinito cujas casas são numeradas por pares $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Em cada movimento, as 8 possibilidades

$$(a, b) \to (a \pm 1, b \pm 2),$$

$$(a, b) \to (a \pm 2, b \pm 1)$$

são igualmente prováveis. Sabendo que o cavalo sai de $(0, 0)$, calcule a probabilidade de que, após 2023 movimentos, ele esteja em uma casa (a, b) com $a \equiv 4 \pmod 8$ e $b \equiv 5 \pmod 8$.

---

6. Determine todos os pares $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ de constantes reais tais que existe uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ de reais positivos tal que, para todo $n \geq 1$,

$$a_n \geq c \cdot a_{n+1} + d \cdot \sum_{1 \leq j < n} a_j.$$