Tudo (con)junto e misturado

Profª Luiza Clara Pacheco

26ª Semana Olímpica - Nível 1

Problema 1 Prove que de qualquer conjunto de dez inteiros podemos escolher um subconjunto cuja soma é um múltiplo de 10.

Problema 2 Prove que se escolhermos mais do que n números do conjunto {1, 2, . . . , 2n}, então um deles será múltiplo de outro. Isso pode ser evitado com n números?

Problema 3 (Lista Cone Sul 2016) Seja S um subconjunto do conjunto {0, 1, 2, 3, ..., 1997} com $|S| > 1000$. Prove que um dos elementos de S é uma potência de 2 (isto é um número da forma 2^k onde k é um inteiro não negativo) ou existem dois elementos distintos a, $b \in S$ tal que a soma $a + b$ é uma potência de 2.

Problema 4 (Lista Cone Sul 2017) Ache o maior inteiro positivo N tal que o número de inteiros no conjunto {1, 2,..., N} que são divisíveis por 3 é igual ao número de elementos que são divisíveis por 5 ou por 7 (ou por ambos).

Problema 5 (TST Cone Sul 2016) Sejam A e B dois conjuntos finitos e não vazios. Seja $A + B$ o conjunto definido por $\{a + b | a \in A, b \in B\}$.
(a) Encontre o maior inteiro k possível para o qual existem conjuntos A, B contidos em N tais que $|A| = |B| = k$ e $A + B = \{0, 1, 2, \dots , 2016\}$.
(b) Encontre o menor inteiro m possível para o qual existem conjuntos A, B contidos em N tais que $|A| = |B| = m$ e $A + B = \{0, 1, 2, \dots , 2016\}$.

Problema 6 (IMO 1972) Prove que, de qualquer conjunto de dez números distintos de dois dígitos, podemos escolher dois subconjuntos A e B (disjuntos) cuja a soma dos elementos é a mesma em ambos.

Problema 7 (Cone Sul 2013) Seja M o conjunto dos números inteiros de 1 até 2013 inclusive. A cada um dos subconjuntos de M atribuímos uma das k cores disponíveis, com a condição de que, se dois conjuntos distintos e cumprem que, então aos conjuntos e são atribuídas cores distintas. Qual é o menor valor possível que k pode ter?

Problema 8 (JBMO Shortlist 2019) Seja S um conjunto de 100 números inteiros positivos com a seguinte propriedade: "Entre cada quatro números de S, há um número que divide cada um dos outros três ou há um número que é igual à soma dos outros três." Prove que o conjunto S contém um número que divide todos os outros 99 números de S.

Problema 9 (EGMO 2021) O número 2021 é *fantabuloso*. Se qualquer elemento do conjunto $\{m, 2m+1, 3m\}$ é *fantabuloso* para algum m inteiro positivo, então todos os elementos desse conjunto são fantabulosos. Com base nisso, podemos afirmar que 2021^{2021} é *fantabuloso*?

Problema 10 (IMO 1985) Sejam n, k inteiros positivos primos entre si, com $k < n$. Pintamos cada número em $M = \{1, 2, 3, \dots , n - 1\}$ de azul ou branco, de modo que i e $n - i$ têm a mesma cor. Sabendo também que, se i k, então i e $|i - k|$ têm a mesma cor, prove que todos os números em M têm a mesma cor.