Princípio da casa dos pombos

Vitória Aparecida Santos Ferreira - vitoriaaparecida94@gmail.com

26° Semana Olímpica - Janeiro 2023 - Nível 1

1 Apresentação inicial

O **princípio da casa dos pombos (PCP)**, também chamado de *princípio das gavetas* ou *princípio de Dirichlet*, afirma que

Se $n+1$ pombos precisarem ser alocados em n casas, então pelo menos uma das casas conterá mais de um pombo.

É uma observação simples de ser entendida e demonstrada. Suponha o contrário, isto é, que todas as gaiolas tenham no máximo 1 pombo. Com isso, há, no máximo, $n \cdot 1 = n$ pombos. Contradição.

Uma generalização deste princípio atesta que

Se $nk+1$ pombos são colocados em n gaiolas, pelo menos uma conterá $k+1$ pombos.

A demonstração é como acima e a formulação continua natural. Por exemplo, se há 25 pessoas em uma sala, garante-se que pelo menos 3 fazem aniversário no mesmo mês.

1.1 Exemplos na Teoria dos números

1. Seja S subconjunto de $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 12\}$ contendo 7 elementos. Então, podem ser extraídos dois subconjuntos de S cuja soma dos elementos é a mesma.

   Solução: A maior soma que se pode obter com 7 elementos do conjunto dado é $6 + 7 + \cdots + 12 = 63$. Desse modo, fixado o conjunto S qualquer, a soma dos valores em um $T \subseteq S$ variam em $\{1, 2, 3, \ldots, 63\}$. Para este S fixo, há $2^7 - 1 = 127$ subconjuntos não vazios e, portanto, se os subconjuntos possíveis são os *pombos* e as somas são as *casas*, segue, do princípio da casa dos pombos, que há pelo menos dois subconjuntos de S com mesma soma.

2. Seja n inteiro positivo dado. Existe algum múltiplo de n que pode ser escrito apenas usando algarismos 0 e 1 na base 10.

   Solução: Considere os números

   $$1; \quad 11; \quad 111; \quad \ldots; \quad \underbrace{11\ldots1}_{n+1 \text{ algarismos}}.$$

   São $n+1$ números. Os possíveis restos de um número qualquer na divisão por n são $0, 1, \ldots, n-1$, isto é, existem n possibilidades. Pelo princípio da casa dos pombos, pelo menos dois da lista acima terão mesmo resto na divisão por n. A diferença entre estes dois será como pedido no enunciado, ou seja, divisível por n e formada apenas por 0 e 1.

1.2 Exemplos na Geometria

1. Seja n um valor positivo fixado e considere que o plano é pintado com duas cores. Existem dois pontos de mesma cor distando n metro(s).

   Solução: Construa um triângulo equilátero de lado n. Como são 2 cores e 3 vértices, pelo princípio da casa dos pombos, pelo menos 2 deles são de mesma cor. E, ainda, distam n metro(s).

1.3 Exemplos na Análise combinatória

1. Mostre que, em um grupo de n pessoas, $n \geq 2$, há pelo menos duas com o mesmo número de conhecidos.

   Nota: considere a relação de conhecimento como mútua, isto é, se A conhece B, então B conhece A.

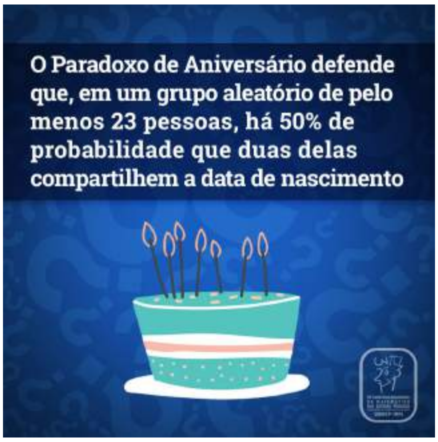
   Solução: Considere os conjuntos $A_0 :=$ pessoas que não conhecem outras; $A_1 :=$ pessoas que conhecem exatamente 1 outra; $\cdots$; $A_{n-1} :=$ pessoas que conhecem todas as outras $n-1$. Note que, se houver 1 pessoa (X) em A_0, então A_{n-1} é vazio, pois alguém não conhece X. Desse modo, são n pessoas para serem alocadas em $n-1$ conjuntos e segue o resultado.

   Suponha, agora, que A_0 seja vazio. Logo, restam $A_1, \ldots, A_{n-1}$ para encaixar as n pessoas. Pelo princípio da casa dos pombos, algum dos A_i conterá pelo menos duas pessoas.

2. **(O paradoxo do número 23)** Qual é o menor número de pessoas em uma sala para se ter certeza de que duas tenham nascido no mesmo dia e mês? (Assuma um ano com 365 dias.)

   Solução: Pode-se usar o PCP, onde são $365 = k$ gaiolas. Assim, com $k + 1 = 366$ pessoas, é garantido que duas fazem aniversário no mesmo dia.

   O inusitado ocorre porque, apesar de a probabilidade 100% só ser atingida com 366, probabilidades altas - acima de 50% - aparecem ainda em quantidades pequenas de pessoas, como afirma o **paradoxo de aniversário**.



Calculemos a probabilidade de, em um grupo de n pessoas, **não** haver aniversários coincidentes: a 1^a pessoa pode fazer aniversário em 365; a 2^a tem 364 possibilidades; a 3^a possui 363 dias; e assim por diante, até a $n-$ésima dispor de $365 - (n-1)$ datas.

Com isso, a probabilidade de que **não** haja repetição é

$$\frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365 - n + 1)}{365^n}.$$

E, portanto, o valor que queremos é 1 menos este. Quando $n = 23$, tem-se que

$$1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots 343}{365^{23}} \simeq 0,5073.$$

2 Exercícios

Sua vez de se divertir acomodando os pombos :) Não se incomode se as resoluções forem mais textuais do que numéricas, é algo comum nas soluções por PCP.

1. (AMC - 2006 - adaptado) Seis inteiros positivos foram escolhidos aleatoriamente entre 1 e 2022. Qual a probabilidade de um par possuir diferença múltipla de 5?

2. Em um planeta, mais da metade da superfície (considerada uma circunferência) é terra seca. Mostre que, se tiverem tecnologia, os habitantes podem cavar um túnel reto passando pelo centro do planeta que comece e termine em terra seca.

3. Mostre que todo subconjunto de $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ contendo $n+1$ elementos possui um par de números coprimos (o mdc entre eles é 1).

4. (IMO - 1972) Considere um conjunto qualquer de 10 números positivos de dois dígitos. Mostre que existem dois subconjuntos disjuntos de mesma soma.

5. Em um conjunto de 7 pessoas, a soma de suas idades é 332 anos. Prove que podemos escolher 3 delas com a soma de suas idades maior ou igual a 142 anos.

6. Suponha que os números de 1 a 15 foram distribuídos aleatoriamente ao redor de um círculo. Mostre que existem 5 consecutivos cuja soma é maior ou igual a 40.

7. (Bielorússia - 1996) Em um grupo de 29 hobbits, existem alguns que falam a verdade e outros que sempre mentem. Em um dia de primavera, sentados ao redor de uma mesa, cada um deles afirmou que seus dois vizinhos eram mentirosos.

   a) Prove que pelo menos 10 hobbtis falavam a verdade.

   b) E possível que exatamente 10 deles falem a verdade?

8. Mostre que, em um grupo de 6 pessoas, pode-se tomar um trio em que todos os indivíduos se conhecem ou em que todos não se conhecem.

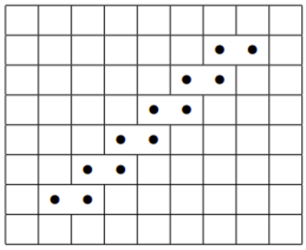
9. Seja n um número não divisível por 2 ou por 5. Mostre que existe um inteiro consistindo inteiramente de algarismos 1 e que é divisível por n.

   (Dica: seguir o que foi feito no exemplo na seção de Teoria dos números e usar que $\text{mdc}(n, 10) = 1$.)

10. (Rioplatense - 2017) João tem 13 cartas, coloridas de verde de um lado e de azul do outro, e numeradas com inteiros em cada face. Prove que existe um conjunto de 3 cartas tal que a soma das 3 faces verdes seja múltipla de 3 e a soma das 3 azuis também seja múltipla de 3.

11. Em um período de 5 semanas seguidas, uma pessoa estudou pelo menos uma hora por dia, não excedendo 11 horas em 7 dias consecutivos. Mostre que existe um intervalo de dias em que houve exatamente 20 horas de estudo.

12. (Canadian Mathematica Olympiad - CMO - 2007) Qual o número máximo de dominós 2 x 1 que podem ser dispostos, sem sobreposição, no tabuleiro 8 x 9 da figura, que já possui 6 dominós dispostos?



13. (USAMTS - 2018) Cada ponto do plano foi colorido de azul, verde ou vermelho. Mostre que existe um retângulo cujos 4 vértices são da mesma cor.

14. O plano é pintado usando três cores. Prove que existem 2 pontos da mesma cor que distam exatamente 1 metro.

Referências

[1] D. Fomin, S. Genkin, and Itenberg I. *Círculos matemáticos: a experiência russa*. IMPA, 1st edition, 2012.

[2] José Plínio O. Santos, Margarida P. Mello, and Idani T.C. Murari. *Introdução à Análise Combinatória*. Editora ciência moderna, 4th edition, 2007.

[3] Pablo Soberón. *Problem-solving methods in combinatorics: an approach to olympiad problems*. Birkhäuser, 1st edition, 2013.