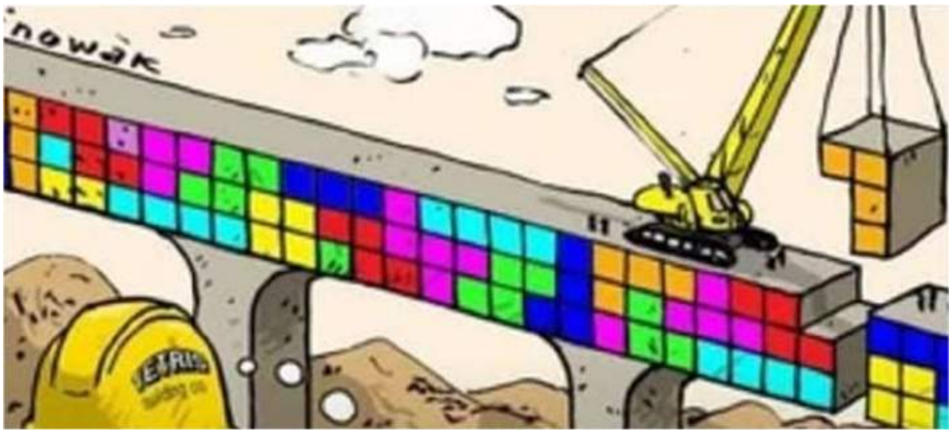
TABULEIROS

Semana Olímpica, N1, Rio de Janeiro – RJ, janeiro de 2023

Tiago Sandino, tiagosandino1@gmail.com



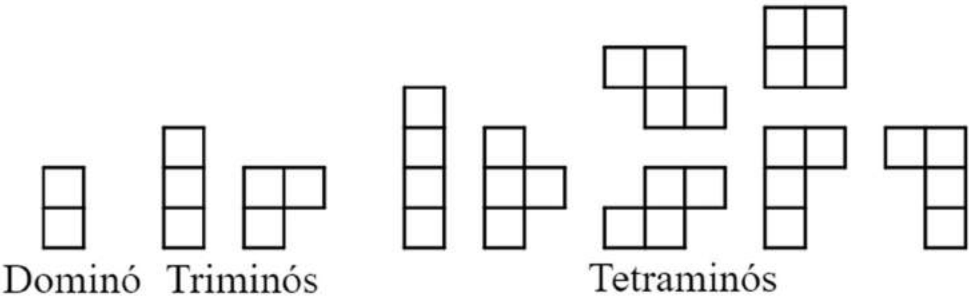
A figura acima passa uma ideia de quais são algumas das estrelas deste material, os tetraminós, que conheceremos melhor logo mais.

O assunto “tabuleiros”, aqui tratado, não abrange todo e qualquer problema em que tenha um tabuleiro envolvido. Para ficar em apenas um exemplo, há muitos problemas de contagem que envolvem a contagem do número de maneiras de cobrir um certo tabuleiro com certos tipos de peças ou seguindo certas regras. Pois bem, não é esse o tipo de problemas que trataremos. Nos problemas de tabuleiros que focaremos aqui, as perguntas são majoritariamente do tipo:

“Com as peças abaixo é possível cobrir um tabuleiro de tais dimensões?”

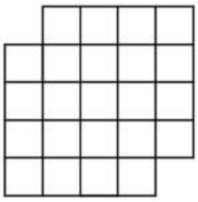
Ao resolver-se esse tipo de problema, claro que há chance de ser possível cobrir o tabuleiro. No caso, deve-se apresentar como é feita a cobertura. No caso de não ser possível fazer a cobertura, e diga-se de passagem, que é a grande maioria das vezes, deve-se justificar por que não é possível. Para essa justificativa, normalmente pintamos o tabuleiro de uma determinada maneira, com uma certa quantidade de cores, e algum padrão deverá ser identificado ao tentar-se colocar aquelas peças em cima do tabuleiro. Seria devido a esse padrão não ser possível cobrir o tabuleiro.

As peças em questão, são as que damos o nome de poliminós. Aos poliminós com dois quadradinhos, damos o nome de dominós; aos com três, triminós; com quatro, tetraminós; com cinco, pentaminós; e com seis ou mais, poliminós. Observe uma ilustração de algumas dessas peças abaixo.

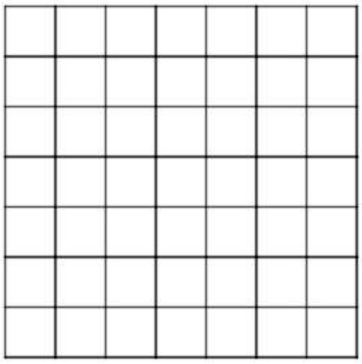


PROBLEMAS

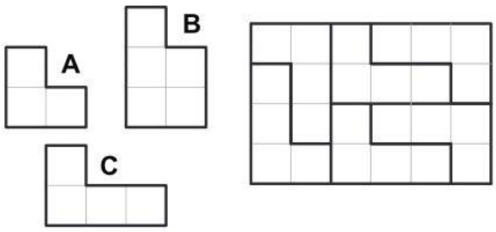
1. Determine se é possível ou não cobrir o tabuleiro abaixo, sem sobreposições, usando apenas dominós?



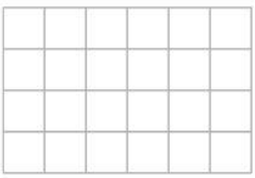
2 (Rioplatense, 2013, NA, P.4). Cobre-se completamente um tabuleiro 7×7 com 16 peças 3×1 e uma peça 1×1. Mostrar as posições que pode ocupar a peça 1×1 e explique por que não há outras.



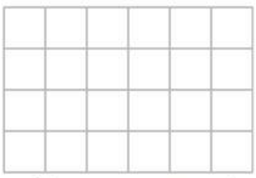
3 (OBMEP, 2012, N1, 2ª Fase, P1). Pedro brinca com um tabuleiro quadriculado 4×6 e com peças dos tipos A, B e C. Ele tenta cobrir inteiramente o tabuleiro com as peças, encaixando-as sem que nenhuma fique sobre outra. Por exemplo, usando somente peças do tipo C, ele consegue cobrir o tabuleiro, como indicado na figura.



a) Mostre como Pedro pode cobrir o tabuleiro usando somente peças do tipo A.

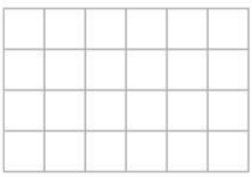


Faça seu rascunho aqui

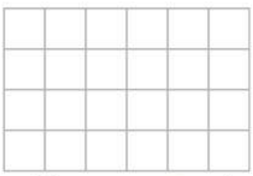


Coloque sua resposta aqui

b) Mostre como Pedro pode cobrir o tabuleiro com peças dos tipos A e B, suando uma ou mais peças do tipo B.



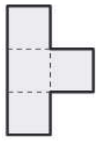
Faça seu rascunho aqui



Coloque sua resposta aqui

c) Explique por que não é possível cobrir o tabuleiro usando somente peças do tipo B.

4 (OBMEP, 2015, N1, 2ª Fase, P5). Maria possui muitas peças, todas iguais, formadas por quatro quadradinhos, como mostra a figura ao lado. Sem sobrepor peças, ela tenta cobrir todas as casas de vários tabuleiros quadrados, fazendo coincidir os quadradinhos das peças com os do tabuleiro.

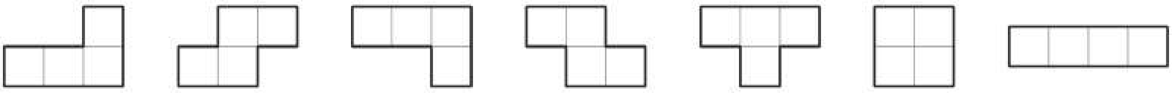


a) Desenhe na figura abaixo uma maneira de cobrir um tabuleiro 4×4 com essas peças.

b) Explique por que nenhum tabuleiro quadrado pode ser coberto com exatamente vinte peças.

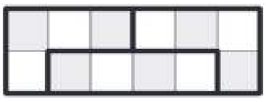
c) Explique por que Maria nunca conseguirá cobrir um tabuleiro 10×10 com suas peças.

5 (OBMEP, 2018, N1). Marília tem sete peças de madeira, como ilustrado abaixo:

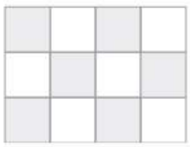


Ela brinca de cobrir todas as casas de tabuleiros retangulares com essas peças, sem colocar uma peça sobre outra. Cada peça deve cobrir exatamente 4 casas do tabuleiro.

Veja como Marília cobriu um tabuleiro 2×6:

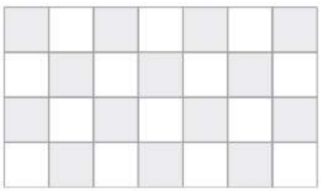


a) Cubra o tabuleiro abaixo usando três peças de Marília.

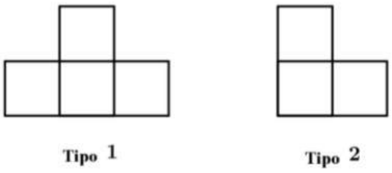


b) Qual peça não cobre o mesmo número de casas brancas e casas cinzas de um tabuleiro?

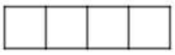
c) Explique por que Marília nunca irá conseguir cobrir o tabuleiro abaixo.

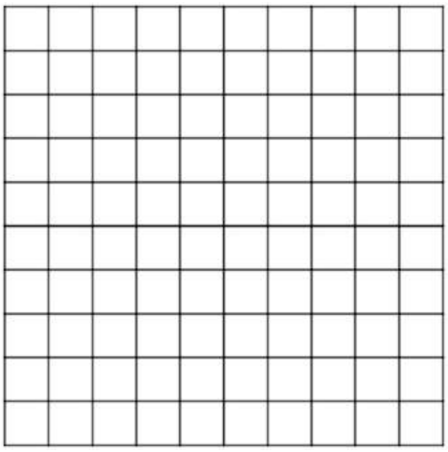


6 (OBM, 2016, N1, 2ª Fase). A figura a seguir apresenta peças de dois tipos: o Tipo 1, com 4 quadradinhos, o Tipo 2, com 3 quadradinhos. Um tabuleiro com m linhas e n colunas foi coberto, sem sobreposição, com peças do Tipo 1 com exceção de 3 quadradinhos. Então, o mesmo tabuleiro foi coberto, também sem sobreposição, com peças do Tipo 2 com exceção de 2 quadradinhos. As peças podem ser giradas, mas não podem sair do tabuleiro. Qual é o menor valor possível para o produto $m \cdot n$?

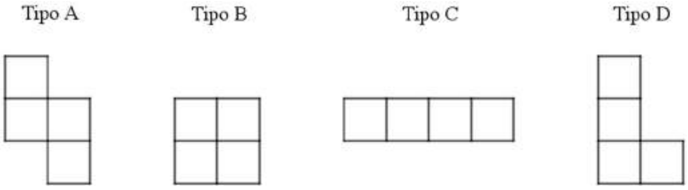


7. Mostre que um tabuleiro 10×10 não pode ser coberto por 25 “straight tetraminós” (como o da figura abaixo).



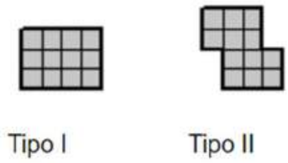


8 (Rioplatense, 2011, Nível A, P.6). Temos um tabuleiro de 200×200 casinhas e peças dos seguintes tipos:



Cada ficha cobre exatamente 4 casinhas do tabuleiro e é permitido girar à vontade as fichas. O tabuleiro foi coberto completamente, sem superposições e sem sobras, usando pelo menos uma ficha de cada tipo. Demonstre que foi utilizado uma quantidade par de fichas do Tipo D.

9 (Rioplatense, 2005, Nível A, P.2). Dispomos de uma quantidade suficiente de peças dos seguintes tipos:

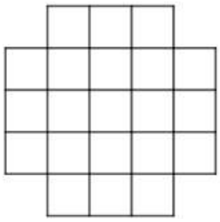


Cada peça consiste de doze quadradinhos de lado um. Queremos construir um retângulo com peças dos tipos I e II, utilizando pelo menos uma peça do tipo II, sem sobrepor as peças e sem deixar buracos entre elas.

Decida se isso é possível. Em caso afirmativo, mostre um exemplo, e em caso negativo, explique por que não é possível.

Observação: As peças podem rotacionar.

10 (Peru, 2011, N1, Quarta Fase). O seguinte tabuleiro é formado por 21 quadradinhos brancos:



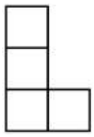
Uma *OPERAÇÃO-BP* consiste em escolher dois quadradinhos brancos que tenham exatamente um vértice em comum e pintar esses dois quadradinhos de preto. Após dez OPERAÇÕES-BP adequadas, sobra apenas um quadradinho branco.

a) Dê um exemplo em que após dez OPERAÇÕES-BP adequadas, sobre apenas um quadradinho branco.

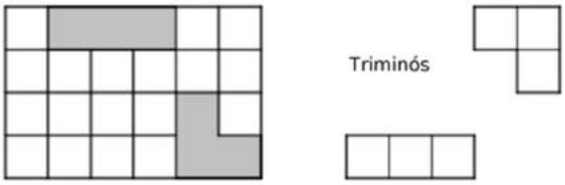
b) Em quais posições do tabuleiro esse quadradinho branco pode ficar?

11 (Peru, 2011, N1). Cada casinha de um tabuleiro 2011×2011 é pintada de vermelho ou azul. Será que é possível pintarmos todas as casinhas de modo que cada casinha vermelha tenha exatamente três casinhas vizinhas azuis e que cada casinha azul tenha exatamente uma casinha vizinha vermelha?

12. Prove que um retângulo 4×11 não pode ser coberto por peças do tipo apresentado abaixo:



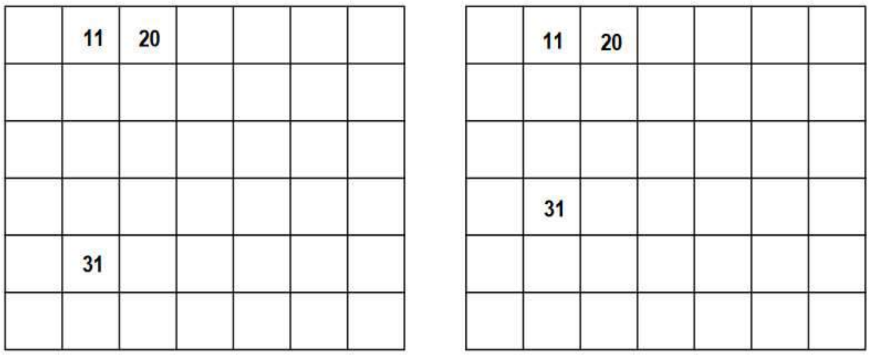
13 (Banco de Questões OBMEP, 2020). Triminós são peças formadas por três quadradinhos, como indica a figura abaixo. Dois desses triminós foram colocados dentro de um tabuleiro 4×6. Qual o número máximo de triminós que podem ser colocados dentro do tabuleiro de modo a cobrir sem sobreposição as casinhas restantes?



14 (OBM, N1, 2001, 3ª Fase) As 42 crianças de uma escola infantil deram as mãos formando uma fila e cada uma delas recebeu um número da seguinte maneira: a primeira delas ficou com o número 1, a segunda ficou com o número 2 e, assim sucessivamente, até a última, que ficou com o número 42. Continuando de mãos dadas, foram para um pátio, onde cada uma delas ficou sobre uma lajota quadrada; duas crianças com um número consecutivo ficaram em lajotas vizinhas com um lado comum (ou seja, do lado esquerdo, do lado direito, na frente ou atrás, mas nunca em diagonal).

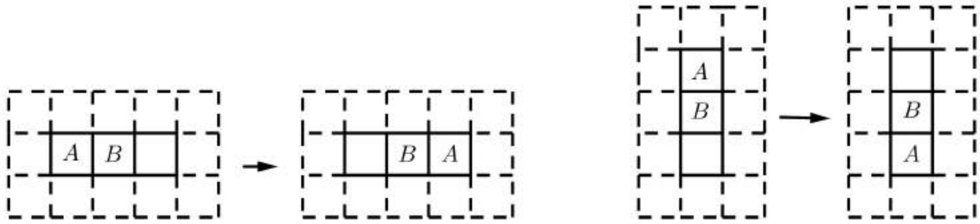
Ao relatar esse fato para a diretora, a inspetora Maria fez o desenho à esquerda, mostrando a posição de três crianças sobre o retângulo formado pelas 42 lajotas, sobre as quais estavam as crianças. Num outro comunicado, a inspetora Célia fez outro desenho, mostrado à direita, com a posição das mesmas crianças sobre o mesmo retângulo. Ao receber os dois desenhos a diretora disse a uma das inspetoras: “O seu desenho está errado”.

i) Com qual das duas inspetoras a diretora falou? Qual foi o raciocínio da diretora?
ii) Complete o desenho correto satisfazendo as condições do enunciado.



(Desenho de Maria) (Desenho de Célia)

15 (Argentina, 2016). Em um tabuleiro quadriculado infinito se colocam n fichas em n casinhas. O movimento permitido é o seguinte: se uma das 4 casinhas vizinhas a uma ficha A tem uma ficha B e a casa seguinte está vazia, pode-se mover a ficha A por cima da ficha B até a casinha vizinha. Por exemplo



Esse movimento pode ser feito em qualquer uma das quatro direções

$$\rightarrow \uparrow \leftarrow \downarrow$$

Decida se existe uma maneira de colocar as n fichas de modo que após uma quantidade finita de movimentos permitidos se obtenha uma configuração de fichas idêntica à inicial, porém deslocada de uma casinha em alguma direção para

a) $n = 2015$;
b) $n = 2014$.

16 (KangoTreino, 2020, Nível B, adaptado). Qual o maior número de figuras, como a figura 1, que podem ser colocadas sobre a figura 2 sem quebras e sem sobreposições. Não se esqueça de provar que não é possível colocar mais.

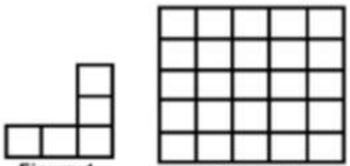
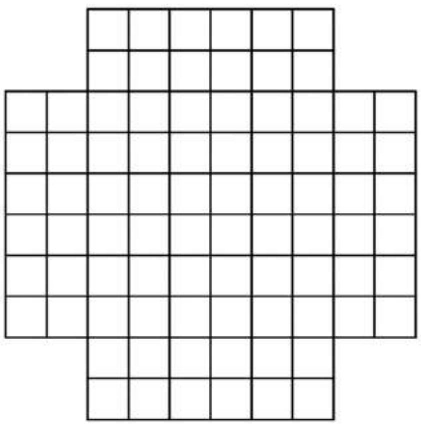


Figura 1 Figura 2

17 (Crux Mathematicorum, MA27). O jogo Battleship é jogado em um tabuleiro 10×10 no qual 4 quadrados 2×2 foram removidos dos cantos, como na figura abaixo.

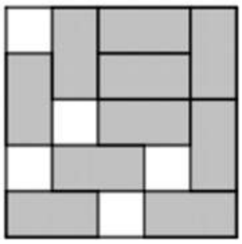


Qual é a maior quantidade de submarinos (que ocupam três quadrados consecutivos na horizontal ou na vertical) que podemos posicionar em um tabuleiro se não for permitido que dois submarinos compartilhem um lado ou um canto de um quadrado?

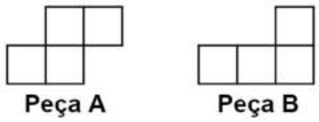
18 (Rioplatense, 2019, NA, P6/6). Tem-se um tabuleiro em forma de triângulo equilátero de lado 10, dividido em casas em forma de triângulos equiláteros de lado 1.
Ana quer cobrir completamente este tabuleiro usando peças dos dois tipos a seguir, cada uma das quais deve cobrir exatamente 4 casas do tabuleiro:

As peças podem girar ou virar, mas não podem se sobrepor.
Quantas peças do tipo 1, no mínimo, Ana precisa usar para cumprir seu objetivo?
Mostrar como pode-se cobrir o tabuleiro usando essa quantidade de peças de tipo 1 e explicar por que é impossível fazer usando menos peças de tipo 1.

19 (Banco de Questões OBMEP, N1, 2020). Algumas peças cinzas no formato de um dominó 2×1 podem ser usadas para cobrir os quadradinhos de um tabuleiro 5×5. Dizemos que o tabuleiro está *lotado* quando não há espaço para colocar novas peças, como no exemplo abaixo. Qual o menor número de peças que devemos usar para deixar um tabuleiro *lotado*?



20 (Seletiva Fortaleza – Rioplatense, 2012). Benjamim tem 25 peças A e 25 peças B, cujos formatos estão mostrados abaixo.



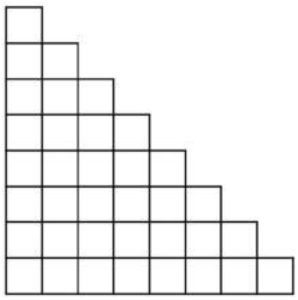
Com as 50 peças, Benjamim pretende cobrir um tabuleiro completamente, sem deixar buracos e nem fazer sobreposições. Ele sabe que cada quadradinho da peça A e que cada quadradinho da peça B tem $1\ cm^2$ de área. Sabendo que ele pode girar as peças do jeito que ele quiser, podendo inclusive "inverter" qualquer peça, pergunta-se:

a) Se o tabuleiro for 8×8 (ou seja, ele tiver $8\ cm$ de comprimento por $8\ cm$ de largura), é possível que ele consiga cobrir todo o tabuleiro?

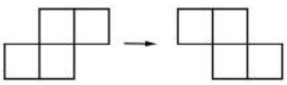
b) Se o tabuleiro for 8×9, é possível que ele consiga cobrir todo o tabuleiro?

c) Se o tabuleiro for 9×9, é possível que ele consiga cobrir todo o tabuleiro?

d) Se todas as casas acima de uma diagonal do tabuleiro 8×8 forem retiradas (veja figura abaixo), é possível que ele consiga cobrir todo o tabuleiro?



Observação: Note que as duas peças abaixo são as mesmas, pois uma foi invertida para obter a outra.



21. Um piso retangular foi coberto por azulejos 2×2 e 1×4. Um azulejo foi quebrado. Há um azulejo do outro tipo disponível. Mostre que o piso não por ser coberto rearranjando os azulejos.