Rio de Janeiro, 26 de janeiro de 2023.
Prof: Gabriel de Oliveira Terra
26ª Semana Olímpica
Combinatória – A transição para o nível 2

ANÁLISE COMBINATÓRIA

CONTAGEM

- **Princípio da Adição:** Se uma decisão A pode ser tomada de x maneiras, a decisão B pode ser tomada de y maneiras e as decisão são exclusivas, então o número de maneiras de se tomarem as decisões A ou B é x+y.
- **Princípio da Multiplicação:** Se uma decisão A pode ser tomada de x maneiras e se uma vez tomada a decisão A, a decisão B pode ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões A e B é xy.
- **Permutação simples:** *n* elementos distintos podem ser permutados de n! maneiras.
- **Permutação com repetição:** Considere n elementos, onde existem a iguais entre si, b iguais entre si, c iguais entre si, ... O número de permutações destes elementos é.
- **Permutação Circular:** *n* elementos distintos podem ser colocados de (n – 1)! Maneiras ao longo de uma circunferência.
- **Combinação simples:** Pode-se escolher *k* elementos dentre *n* distintos de $\binom{n}{k}$ maneiras.
- **Combinação completa:** O número de soluções naturais do sistema $x_1 + x_2 + ... + x_p = n$ é igual a $\binom{n+p-1}{p-1}$.
- **Permutação caótica ou desarranjo:** É uma permutação no qual nenhum elemento do conjunto ocupa a mesma posição que ocupava inicialmente: $$D_n = n!\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+...+\frac{(-1)^n}{n!}\right).$$
- **1º Lema de Kaplansky:** Existem $F(n,p)=\binom{n-p+1}{p}$ subconjuntos de p elementos a partir de {1,2,3,...,n} de modo que nestes subconjuntos não existam números consecutivos.
- **2º Lema de Kaplansky:** Existem $G(n,p)=\frac{n}{n-p}\binom{n-p}{p}$ maneiras que podemos formar um subconjunto de p elementos a partir do conjunto A={1,2,3,...,n}, cujos elementos estão distribuídos ao longo de um círculo, de modo que dois elementos do subconjunto não sejam consecutivos.

EXERCÍCIOS

1) Quantos inteiros há entre 1000 e 9999 cujos algarismos são distintos?

2) Quantos inteiros há de 1000 a 9999 que possuem pelo menos dois algarismos iguais?

3) Quantos números de quatro dígitos são maiores que 2400 e:

a) tem todos os dígitos diferentes.

b) não tem dígitos iguais a 3, 5 ou 6.

c) tem as propriedades a) e b) simultaneamente.

4) Um vagão de metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem sentar de frente, 3 preferem sentar de costas e os demais não tem preferência. De quantos modos os passageiros podem se sentar, respeitando-se as preferências?

5) Seis pessoas vão ocupar uma fileira de um cinema que possuem 6 poltronas. De quantas maneiras eles podem ocupar tais poltronas.

6) Numa sala existem 4 homens e 5 mulheres. De quantos modos é possível selecionar

a) um homem e uma mulher.

b) dois homens.

c) duas mulheres.

d) duas pessoas.

e) três pessoas.

7) Analisando os anagramas de cada palavra, responda:

- AMOR

a) Quantos anagramas possui?

b) Quantos anagramas o A aparece antes do O?

- SEMANA

a) Quantos anagramas possui?

b) Quantos anagramas o E aparece antes do A?

Contato: prof.gabriel@colegioarena.com.br ou gabriell.alessandro@gmail.com
Insta: @gabrielmatematica

- BRASIL

a) Quantos anagramas possui?

b) Quantos anagramas as letras A e O aparecem juntas, nessa ordem?

c) Quantos anagramas as letras A e O aparecem juntas?

d) Quantos anagramas as letras A e O não aparecem juntas?

e) Quantos anagramas as letras não ocupam a sua posição de origem?

f) Quantos anagramas as vogais consoantes aparecem em ordem alfabética?

8) Quantos são os anagramas da palavra PIRACICABA que não possuem duas letras A juntas?

9) De quantas maneiras é possível colocar em uma prateleira 5 livros de matemática, 3 de física e 2 de biologia, de modo que livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?

10) (OBM-99) Um gafanhoto pula exatamente 1 metro. Ele está em um ponto A de uma reta, só pula sobre ela, e deseja atingir um ponto B dessa mesma reta que está a 5 metros de distância de A com exatamente 9 pulos. De quantas maneiras ele pode fazer isso?

GAB: 36

10) (OBM 2004) De quantos modos diferentes podemos pintar (usando apenas uma cor) as casas de um tabuleiro 4 × 4 de modo que cada linha e cada coluna possua exatamente uma casa pintada?

GAB: 24

11) De quantos modos podemos por três torres de três cores diferentes em um tabuleiro 8 × 8 de modo que nenhuma delas ataque outra?

GAB: 112896

12) Uma embarcação deve ser tripulada por oito homens, dois dos quais só remam do lado direito e um apenas do lado esquerdo. Determine de quantos modos esta tripulação pode ser formada, se de cada lado deve haver quatro homens. Obs : A ordem dos homens deve ser considerada.

13) (Maio 2006) Um calendário digital exibe a data: dia, mês e ano, com 2 dígitos para o dia, 2 dígitos para o mês e 2 dígitos para o ano. Por exemplo, 01-01-01 corresponde a primeiro de janeiro de 2001 e 25-05-23 corresponde a 25 de maio de 2023. Em frente ao calendário há um espelho. Os dígitos do calendário são como os da figura abaixo.

Se 0, 1, 2, 5 e 8 se refletem, respectivamente, em 0, 1, 5, 2 e 8, e os outros d´dígitos perdem sentido ao se refletirem, determine quantos dias do século, ao se refletirem no espelho, correspondem também a uma data.

14) Pedro foi até uma sorveteria que possui 7 sabores diferentes e realizará um pedido de 3 bolas de sorvete, de quantas maneiras diferentes ele pode fazer o pedido?

15) Há sete mulheres e nove homens em uma faculdade no departamento de matemática.

a) Quantas maneiras de selecionar um comitê de cinco membros do departamento são possíveis, se pelo menos uma mulher deve estar no comitê?

b) Quantas maneiras de selecionar um comitê de cinco membros do departamento são possíveis, se pelo menos uma mulher e um homem devem estar no comitê?

16) Há quantas maneiras possíveis de colocar 8 bolas idênticas em 5 caixas distintas?

Material do POTI:

Gabarito da lista: