Desigualdades Geométricas

Edson Roberto Abe

23 / janeiro / 2023

(1) AB + BC ≥ AC

1 – Se a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 são os lados de um pentágono convexo e se d_1, d_2, d_3, d_4 e d_5 são os comprimentos de suas diagonais, prove que

$$\frac{1}{2} < \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{d_1+d_2+d_3+d_4+d_5} < 1 .$$

2 – Se a, b, c são números positivos, então $\sqrt{a^2+ac+c^2} \le \sqrt{a^2-ab+b^2} + \sqrt{b^2-bc+c^2}$.

3 – Se m_a, m_b, e m_c são os comprimentos das medianas de um triângulo com lados a, b e c, respectivamente, prove que é possível construir um triângulo com lados de tamanho m_a, m_b, e m_c, e que

$$\frac{3}{4}(a+b+c) < m_a + m_b + m_c < a+b+c .$$

4 (Desigualdade de Ptolomeu) – Se ABCD é um quadrilátero convexo, então AC.BD ≤ AB.CD + BC.DA. A igualdade ocorre se e somente se ABCD é um quadrilátero cíclico.

5 – Se a, b, c são números positivos com c < a e c < b, prove que $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \le \sqrt{ab}$.

(2) $S = \frac{a.h}{2} = \frac{a.b.sen(C)}{2} = \frac{a.b.c}{4R} = p.r$

a = y + z, b = x + z, c = x + y => 2p = 2(x + y + z) => p = x + y + z

p – a = x, p – b = y, p – c = z => $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{(x+y+z)xyz}$

=> $r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$ e $R = \frac{a.b.c}{4.S} = \frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{4\sqrt{(x+y+z)xyz}}$

$(a+b+c).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9$, com igualdade se e somente se a = b = c

Desigualdade de Nesbitt: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$

6 (Índia – 2003) – Sejam a, b, c os lados do de um triângulo ABC. Se construirmos um triângulo A'B'C' com lados $a+\frac{b}{2}, b+\frac{c}{2}, c+\frac{a}{2}$, prove que área(A'B'C') ≥ (9/4).área(ABC).

7 – Seja ABC um triângulo equilátero de lado a. Seja M um ponto dentro de ABC e sejam D, E, F as projeções de M sobre os lados BC, CA e AB, respectivamente. Prove que:

(i) $\frac{1}{MD}+\frac{1}{ME}+\frac{1}{MF} \ge \frac{6\sqrt{3}}{a}$,

(ii) $\frac{1}{MD+ME}+\frac{1}{ME+MF}+\frac{1}{MF+MD} \ge \frac{3\sqrt{3}}{a}$.

8 – Seja ABC um triângulo com alturas AD, BE, CF e H o ortocentro. Prove que

(i) $\frac{AD}{HD} + \frac{BE}{HE} + \frac{CF}{HF} \geq 9$,

(ii) $\frac{HD}{HA} + \frac{HE}{HB} + \frac{HF}{HC} \geq \frac{3}{2}$.

9 (IMOSL – 1997) – Os comprimentos dos lados do hexágono convexo ABCDEF satisfazem AB = BC, CD = DE e EF = FA. Prove que

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}.$$

10 – Através de um ponto O dentro de um triângulo de área S, três linhas são traçadas de modo que cada lado intercepta duas delas. Estas linhas dividem o triângulo em 3 triângulos com vértice comum O e áreas S_1, S_2 e S_3, e 3 quadriláteros. Prove que

(i) $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \geq \frac{9}{S}$,

(ii) $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \geq \frac{18}{S}$.

(3) a + b + c = 2p

a.b.c = 4.R.S = 4.R.p.r

$S^2 = p(p – a)(p –b)(p – c) = p^2r^2 \Rightarrow (p – a)(p –b)(p – c) = pr^2$

$\Rightarrow p^3 – (a + b + c).p^2 + (ab + ac + bc).p – abc = pr^2$

$\Rightarrow p^3 – (2p).p^2 + (ab + ac + bc).p – 4.R.p.r = pr^2$

$\Rightarrow ab + ac + bc = p^2 + r^2 + 4Rr$

$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 – 2(ab + ac + bc) = (2p)^2 – 2(p^2 + r^2 + 4Rr) = 2(p^2 – r^2 – 4Rr)$

$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 – 3(a + b + c)(ab + ac + bc) + 3abc =$

$= (2p)^3 – 3(2p)(p^2 + r^2 + 4Rr) + 3.4.R.p.r = 2(p^3 – 3pr^2 – 6Rpr)$

11 – Se A, B e C são os ângulos do triângulo ABC, prove que

$$\cos(A) + \cos(B) + \cos(C) = \frac{r}{R} + 1 \leq \frac{3}{2}.$$

12 (IMO – 1991) – Seja ABC um triângulo onde I é o incentro e L, M, N são as interseções das bissetrizes internas de A, B, C com os BC, CA, AB, respectivamente. Prove que

$$\frac{1}{4} < \frac{AI}{AL}.\frac{BI}{BM}.\frac{CI}{CN} \leq \frac{8}{27}.$$

13 (China) – Considere dois círculos concêntricos de raios R e R_1 (R_1 > R) e um quadrilátero convexo inscrito no menor círculo. As extensões de AB, BC, CD e DA interceptam o círculo maior em C_1, D_1, A_1 e B_1, respectivamente. Mostre que

$$\frac{\text{perímetro } (A_1B_1C_1D_1)}{\text{perímetro } (ABCD)} \geq \frac{R_1}{R}.$$

14 (IMO – 1981) – Seja P um ponto dentro do triângulo ABC. Sejam D, E, F os pés das perpendiculares de P para as retas BC, CA, AB, respectivamente. Encontre o ponto P que minimiza $\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$.

15 – Seja P um ponto dentro do triângulo ABC. Para qual ponto P a soma $PA^2 + PB^2 +$

PC^2 é mínima?

16 (IMO – 1961) – Sejam a, b e c os lados de um triângulo e seja S a área deste triângulo. Prove que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}.S \ .$$

(4)

Mordell's Lemma

P é um ponto no interior do triângulo ABC, e D, E e F são as projeções sobre os lados BC, AC e AB, respectivamente então

$$a.PA \geq c.PE + b.PF \text{ (ou } PA.\text{sen}(A) \geq PE.\text{sen}(C) + PF.\text{sen}(B)).$$

Erdös-Mordell Inequality

P é um ponto no interior do triângulo ABC, e D, E e F são as projeções sobre os lados BC, AC e AB, respectivamente então

$$PA + PB + PC \geq 2(PD + PE + PF).$$

Igualdade se e somente se o triângulo é equilátero e P é o centro de ABC.

17 (IMO – 1991) – Seja ABC um triângulo e P um ponto interior a ABC. Mostre que no mínimo um dos ângulos PAB, PBC, PCA é menor ou igual a 30°.

18 (USA TST – 2001) – Sejam h_a, h_b, h_c as alturas do triângulo ABC. Seja P um ponto qualquer dentro do triângulo. Mostre que

$$\frac{PA}{h_b+h_c} + \frac{PB}{h_a+h_c} + \frac{PC}{h_a+h_b} \geq 1 \ .$$

19 (USA TST – 2000) – Seja ABC um triângulo inscrito em um círculo de raio R, e seja P um ponto no interior do triângulo ABC. Prove que

$$\frac{PA}{BC^2} + \frac{PB}{CA^2} + \frac{PC}{AB^2} \geq \frac{1}{R} .$$