Dígitos

João Pedro

Janeiro 2023

1. (Cone Sul TST 2018) Para todo inteiro positivo n, denotamos $S(n)$ como a soma dos dígitos de n e $P(n)$ o produto dos dígitos de n. Encontre todos os inteiros positivos n tal que $n = S(n) + P(n)$

2. (Lusofonia 2018) Para cada inteiro positivo n, seja $S(n)$ a soma dos dígitos de n. Determine o menor inteiro positivo a tal que existem infinitos inteiros positivos n para quais $S(n) - S(n+a) = 2018$.

3. (OBM 2018) Seja $S(n)$ a soma dos dígitos de n. Determine todos os pares (a, b) de inteiros positivos, tais que a expressão $S(an+b) - S(n)$ tem um número finito de valores, onde n varia nos inteiros positivos.

4. (Iberoamerican 2014) Para cada inteiro positivo n, seja $s(n)$ a soma dos dígitos de n. Encontre o menor inteiro positivo k tal que

$$s(k) = s(2k) = s(3k) = \cdots = s(2013k) = s(2014k).$$

5. (OBM 2014) Encontre todos os inteiros n, $n > 1$ com a seguinte propriedade: para todo k, $0 \leq k < n$, existe um multiplo de n tal que a soma dos dígitos deixa um resto k quando dividido por n

6. (Rioplatense 2018) Para cada inteiro positivo m, seja $S(m)$ a soma dos dígitos de m. Mostre que para todo inteiro positivo n, existe um inteiro positivo m tal que $m + 2S(m) = n$.

7. (Iberoamerican 2016) Seja k um inteiro positivo e $a_1, a_2, \cdots, a_k$ digitos. Prove que existe um inteiro positivo n tal que os últimos $2k$ digitos de 2^n são, na seguinte ordem, $a_1, a_2, \cdots, a_k, b_1, b_2, \cdots, b_k$, para certos dígitos $b_1, b_2, \cdots, b_k$

8. (Lista Cone Sul 2007) Seja $S(n)$ a soma dos dígitos de n. Existe algum natural n tal que os números $S(n), S(2n), S(3n), \ldots$ nunca são múltiplos de 2007?

9. (Cone Sul 2007) Mostre que para todo inteiro positivo n, existe um inteiro positivo k tal que a representação decimal de cada um dos números $k, 2k, \ldots, nk$ contém todos os dígitos $0, 1, 2, \ldots, 9$.

10. (Lista Cone Sul 2009) Para cada inteiro positivo m, denotamos $S(m)$ como a soma de seus dígitos, e seja $f(m) = m + s(m)$. Prove que para todo inteiro positivo n, existe um número que repete exatamente n vezes na sequência $f(1), f(2), ..., f(m), ...$

11. (APMO 2014) Para um inteiro positivo m denote por $S(m)$ e $P(m)$ a soma e produto, respectivamente, dos dígitos de m. Mostre que para todo inteiro positivo n, existem inteiros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisfazendo as seguintes condições:

$$S(a_1) < S(a_2) < \cdots < S(a_n) e S(a_i) = P(a_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

(Seja $a_{n+1} = a_1$.)

12. (Iberoamerican 2012) Mostre que, para todo inteiro positivo n, existem n inteiros positivos consecutivos tais que nenhum é divisível pela soma dos seus dígitos.