Associação Olimpíada Brasileira de Matemática

26ª SEMANA OLÍMPICA

• Nível 2 • Equações Funcionais: Uma primeira abordagem •

Profª Ana Paula Chaves
apchaves@ufg.br
https://sites.google.com/ufg.br/apchaves

Resumo: *Seguramente, não é exagero dizermos que* Equações Funcionais *é um dos temas mais recorrentes no universo das olimpíadas de Matemática (especialmente nas internacionais). Seja pela sua grande variedade de técnicas de resolução, ou por aparecer em competições com diversos níveis de dificuldade, o fato é que este tópico não faz uso de uma teoria mais profunda, com problemas acessíveis até para os alunos do Nível 1 (6º e 7º anos do Ensino Fundamental). Neste material, vamos trabalhar desde problemas mais elementares, até alguns um pouco mais "elaborados", deixando, como esperado, alguns propostos ao final, para deleite do(a) leitor(a).*

INTRODUÇÃO E ALGUMAS DICAS

Uma *Equação Funcional* é, como sugere o próprio nome, aquela na qual a solução é uma **função**, cuja relação está bem definida e depende apenas da sua variável. Na solução de praticamente *todos* os problemas envolvendo equações funcionais, algum tipo de substituição é necessária, seja para simplificar o problema ou para obter o valor da função em algum ponto e partir daí. Algumas ideias comuns, que valem a pena ter em mente antes de *atacar* uma equação funcional, são:

- Fazer umas das variáveis, ou mais, igual a 0, 1 ou algum valor constante;
- Se a equação tem mais de uma variável, expressá-las em função de apenas uma, para reduzir a quantidade de incógnitas. Por exemplo, fazendo $x = z$ e $y = -z$;
- Caso seja dada alguma informação sobre a imagem da função (como por exemplo, que ela é sobrejetiva), utilize a imagem inversa (dado y, tomar x tal que $f(x) = y$, e partir daí);
- Expressar as variáveis dadas em função de *novas* variáveis, de modo a simplificar ou deixar a condição dada mais intuitiva. Por exemplo, se é dado $f(f(f(x)) + y)$ na equação, pode ser interessante fazer $z = f(f(x)) + y$ para simplificar a expressão como $f(z)$. Outra ideia comum

nessa direção é trocar as variáveis existentes por novas, que facilitem a condição. Por exemplo $x = u + v$ e $y = u - v$;

- Usar uma função auxiliar pode ser bem interessante, caso não seja complicado traduzir informações dessa nova função para a original;

PROBLEMAS INICIAIS

Nesta seção, ainda não trataremos de resolver equações funcionais. Vamos começar trabalhando um pouco com problemas envolvendo *funções implícitas*, isto é, cuja relação não está definida explicitamente. Esses problemas vão ser de grande ajuda, para podermos nos ambientar com esse tipo de questão, o que vai facilitar a nosso “ataque" às primeiras equações funcionais.

Problemas Resolvidos.

Problema 1. (OBM 2004) A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida nos inteiros, satisfaz à equação $f(n)-(n+1)f(2-n) = (n+3)^2$, para todo n inteiro. Quanto vale $f(0)$?

Solução: Primeiro, note que fazendo $n = 0$, isso não nos dá de imediato $f(0)$, já que obtemos

$$f(0) - f(2) = 3^2 = 9. \tag{1}$$

Mas isso é útil! Agora, basta vermos uma forma de aparecer novamente apenas $f(0)$ e $f(2)$, e com isso obtemos um sistema linear, fácil de resolver. Para isso, observe que fazendo $n = 2$, conseguimos o nosso objetivo:

$$f(2) - 3f(0) = 5^2 = 25. \tag{2}$$

Agora, para obter o valor de $f(0)$, basta somar as equações (7) e (2), para obter

$$-2f(0) = 34 \Rightarrow f(0) = -17.$$

Problema 2. (OBM 2009) Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ uma função satisfazendo $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ e $f(x+12) = f(x+21) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Então, qual o valor de $f(2009)$?

Solução: Neste problema, vamos mostrar que o fato de f ser 12-periódica e 21-periódica, nos dá que ela é 3-periódica[1], donde, podemos obter qualquer valor de f, a partir dos três valores que foram dados. Para isso, basta fazermos a mudança de variável $x \mapsto x-9$, e conseguimos pela relação dada que,

$$f(x-9+12) = f(x-9+21) \Rightarrow f(x+3) = f(x+12) = f(x).$$

Portanto, conseguimos que f é 3-periódica. Assim, já que, neste caso, $f(x) = f(x+3n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, então $f(2009) = f(2+3\times 669) = f(2) = 2$.

[1]Uma função f é dita *k-periódica*, se $f(x) = f(x+k)$, para todo x no domínio de f.

Problema 3. (OBM 2003) A função f é definida para todos os pares ordenados (x, y) de inteiros positivos e tem as seguintes propriedades:

(i) $f(x, x) = x$;

(ii) $f(x, y) = f(y, x)$;

(iii) $(x + y)f(x, y) = (2x + y)f(x, x + y)$.

Qual é o valor de $f(21, 12)$?

Solução: Por (ii), sabemos que $f(21, 12) = f(12, 21) = f(12, 12+9)$. Assim, usando (iii), conseguimos,

$$(12+9)f(12,9) = (2\cdot 12+9)f(12,21) \Rightarrow 7f(12,9) = 11f(12,21). \tag{3}$$

Agora, por $f(12, 9) = f(9, 12) = f(9, 9+3)$, e novamente (iii),

$$(9+3)f(9,3) = (2\cdot 9+3)f(9,9+3) \Rightarrow 4f(9,3) = 7f(9,12). \tag{4}$$

Aqui, para encurtar o caminho, vamos usar um fato que pode ser provado facilmente por indução, usando (i): para $x \neq 0$, temos $(n+1)f(x, nx) = 2x$. Assim,

$$(3+1)f(3,3\cdot 3) = 2\cdot 3 \Rightarrow f(9,3) = \frac{3}{2},$$

donde substituindo em (4), conseguimos $7f(9, 12) = 6$, e com isso, por (3), obtemos finalmente $f(21, 12) = f(12, 21) = \dfrac{6}{11}$.

Problema 4. (OBM 2002) Seja f uma função real de variável real que satisfaz a condição:

$$f(x) + 2f\left(\frac{2002}{x}\right) = 3x$$

para $x > 0$. O valor de $f(2)$ é igual a quanto?

Solução: Vamos usar uma estratégia similar a que foi vista no **Problema 1**. Primeiro, fazendo $x = 2$ na equação, obtemos

$$f(2) + 2f(1001) = 6. \tag{5}$$

Apesar da informação não nos parecer útil a princípio, perceba que podemos encontrar outra relação, que também envolve apenas $f(2)$ e $f(1001)$, fazendo $x = 1001$:

$$f(1001) + 2f(2) = 3003. \tag{6}$$

Assim, (5) $-2\times$(6), nos dá,

$$-3f(2) = -6000 \Rightarrow f(2) = 2002.$$

Problema 5. (OBM 2000) Seja f uma função real tal que:

(i) Para todo x, y reais, $f(x + y) = x + f(y)$;

(ii) $f(0) = 2$;

Quanto vale $f(2000)$?

Solução: Rapidamente, fazendo $x = 2000$ e $y = 0$, em (i), obtemos

$$f(2000+0) = 2000 + \underbrace{f(0)}_{=2} = 2002.$$

Problema 6. (OBM 2008) Considere a função f, definida no conjunto dos números reais e satisfazendo $f(x) = \frac{cx}{2x+3}$, para todo $x \neq -3/2$. Determine o número de tais funções f para as quais $f(f(x)) = x$, para todo x tal que $f(f(x))$ está bem definida.

Solução: Temos que

$$f(f(x)) = x \Rightarrow \frac{cf(x)}{2f(x)+3} = x \Rightarrow \frac{c\frac{cx}{2x+3}}{2\frac{cx}{2x+3}+3} = x \Rightarrow \frac{c^2x}{(2c+6)x+9} = x,$$

donde,

$$(2c+6)x^2 + (9-c^2)x = 0. \tag{7}$$

Como, pelo enunciado, é pedido que $f(f(x)) = x$ seja válida para todo x tal que esta equação está bem definida, então (7) também deve ser válida para estes mesmos valores de x, que são infinitos. Isto é, o polinômio (7) possui infinitas raizes, donde deve ser o polinômio nulo, e assim

$$2c+6 = 0 \quad \text{e} \quad 9-c^2 = 0,$$

donde $c = -3$, portanto existe uma única função que satisfaz o problema: $f(x) = \frac{-3x}{2x+3}$.

Problema 7. (OBM 2012) Seja $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$ e considere $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$ e, para todo natural $n \geq 1$, satisfaz as seguintes condições:

(i) $f(3n) = 3f(n)+1$;

(ii) $f(3n+1) = 3f(n)+2$;

(iii) $f(3n+2) = 3f(n)$.

Determine $f(2012)$.

Solução: Primeiro, observe que

$$f(2012) = 3f(670) = 3(3f(223)+2) = 9f(223)+6.$$

Mas,

$$f(223) = 3f(74)+2 = 9f(24)+2 = 27f(8)+11 = 81f(2)+11.$$

Logo, $f(2012) = 9 \cdot 11 + 6 = 105$.

Problema 8. (OBM 2003) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x)(f(x) - x) = 0$, então quantas funções f satisfazem o enunciado?

a) Nenhuma.

b) Apenas uma, $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

c) Apenas uma, $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

d) Duas, $f(x) = 0$ e $f(x) = x$.

e) Infinitas funções.

Gabarito:

A resposta correta é a letra **e) Infinitas funções**.

Em um primeiro momento, somos tentados a responder "São duas! Apenas $f(x) = 0$ e $f(x) = x$, satisfazem a condição $f(x)(f(x) - x) = 0$". Contudo, apesar dessas duas funções de fato satisfazerem as condições do problema, observe que a seguinte função também tem esta propriedade

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{se } x \neq 1 \\ 1 & , \text{se } x = 1 \end{cases}.$$

Observe que não há nada de especial no valor $x = 1$, donde podemos considerar a seguinte família de funções

$$f_c(x) = \begin{cases} 0 & , \text{se } x \neq c \\ c & , \text{se } x = c \end{cases},$$

para todo $c \in \mathbb{R}$, que satisfaz $f_c(x)(f_c(x) - x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, existem infinitas funções[2].

Problema 9. (OBM 2001) Seja f uma função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ definida como $f(x) = x/10$ se x é divisível por 10 e $f(x) = x + 1$ caso contrário. Se $a_0 = 2001$ e $a_{n+1} = f(a_n)$, qual é o menor valor de n para o qual $a_n = 1$?

Solução: Apesar de parecer uma tarefa "braçal"aplicar recursivamente a função, até encontrar tal valor de n, veremos que, rapidamente, o valor dos termos da sequência diminuem. Observe que, já que o valor inicial a_0 não é divisível por 10, então iremos aplicar a segunda regra de f nove vezes, até obtermos 2010, ou seja, $a_9 = 2010$. Daí, $a_{10} = f(a_9) = \frac{2010}{10} = 201$. Novamente, vamos aplicar a segunda regra de f nove vezes, até obtermos 210, isto é, $a_{19} = 210$, donde $a_{20} = f(a_{19}) = \frac{210}{10} = 21$. Uma vez mais, agora conseguimos $a_{29} = 30$, e assim $a_{30} = f(a_{29}) = \frac{30}{10} = 3$. Finalmente, basta aplicar a segunda regra sete vezes, obtendo $a_{37} = 10$, portanto $a_{38} = 1$. Assim, o valor de n procurado é $n = 38$.

[2]Essas não são todas! Pense em outras formas de construir funções que satisfazem essa propriedade. :)

Agora que já estamos mais ambientados em trabalhar com funções implícitas, passamos a alguns problemas onde, de fato, vamos encontrar todas as funções que satisfazem uma determinada equação funcional. Muitas das dicas que foram dadas na primeira seção, serão colocadas em prática aqui.

Problemas Resolvidos.

Problema 10. (OBM 2001) Determine todas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tais que $f(x)=f(-x)$ e $f(x+y)=f(x)+f(y)+8xy+115$, para todos reais x e y.

Solução: Observe que é imediato conseguirmos $f(0)$, fazendo $x=y=0$ na equação dada:

$$f(0)=f(0)+f(0)+115 \Rightarrow f(0)=-115.$$

Como podemos usar esse fato? Perceba que fazer x ou $y=0$ na equação, apesar de tentador, não vai nos levar à expressão para f. Mas, não estamos usando a primeira propriedade dada: f é uma função par, i.e., $f(x)=f(-x)$. Podemos fazer $f(0)$ “aparecer" na expressão, tomando apenas $y=-x$, e com isso

$$\underbrace{f(0)}_{=-115}=f(x)+\underbrace{f(-x)}_{=f(x)}+8x(-x)+115 \Rightarrow 2f(x)=8x^2-330 \Rightarrow f(x)=4x^2-115.$$

O leitor fica a cargo de verificar que esta função, de fato, satisfaz as condições do problema, sendo esta a única solução.

Problema 11. (OBM 2003) Determine todas as funções $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$ tais que, para todos $x,y\in\mathbb{R}^*$,

$$f(x)f(y)-f(xy)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}.$$

Solução: Primeiro, note que fazendo $x=y=1$, conseguimos

$$(f(1))^2-f(1)=2 \Rightarrow f(1)=-1 \text{ ou } 2.$$

Assim, tomando $y=1$, obtemos

$$f(x)f(1)-f(x)=x+\frac{1}{x} \Rightarrow f(x)(f(1)-1)=\frac{x^2+1}{x}.$$

Portanto, para $f(1)=-1$, temos $f(x)=-\frac{x^2+1}{2x}$, e para $f(1)=2$, temos $f(x)=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}$. Substituindo na equação original, observamos que $f(x)=-\frac{x^2+1}{2x}$ não satisfaz a mesma para todo par x,y de números reais. Por outro lado, $f(x)=x+\frac{1}{x}$, satisfaz a equação original, donde é a única solução.

Problema 12. (Suiça 1999) Determine todas as funções $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ satisfazendo

$$\frac{1}{x}f(-x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}^*.$$

Solução: Aqui, vamos utilizar uma mudança de variáveis “esperta" para obter a expressão de f. Assim, faça $x \mapsto -1/x$, para obter

$$-xf\left(\frac{1}{x}\right) + f(-x) = -\frac{1}{x}\,.$$

Com o objetivo de eliminar a f(1/x), multiplicamos a equação original por x e então somamos com esta última, para obter

$$f(-x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) - xf\left(\frac{1}{x}\right) + f(-x) = x^2 - \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; 2f(-x) = x^2 - \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; f(-x) = \frac{x^3-1}{2x}.$$

Agora, apenas trocando x por $-x$, vemos que a expressão não muda, donde $f(x) = \frac{x^3-1}{2x}$. Substituindo na equação original, vemos que esta função a satisfaz, e com isso é a única solução do problema.

Problema 13. (Bielorússia 1995) *Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que*

$$f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Solução: Denotando

$$P(x,y):\; f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy,$$

temos que

$$P(0,0):\; f(f(0)) = f(0) + f(0)^2,$$

e fazendo $c = f(0)$, conseguimos que $f(c) = c(c+1)$. Agora, note que

$$\begin{aligned} P(c,0):\quad f(f(c)) &= f(c) + f(c)\overbrace{f(0)}^{=c} \\ &= f(c)(c+1) \end{aligned} \tag{8}$$

e também,

$$\begin{aligned} P(x,-x):\quad f(f(0)) &= f(0) + f(x)f(-x) + x^2 \\ f(c) &= c + f(x)(-x) + x^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Usando $f(c) = c(c+1)$ em (9), obtemos

$$f(x)f(-x) = c(c+1) - c - x^2 \;\Rightarrow\; f(x)f(-x) = c^2 - x^2.$$

Fazendo $x = c$ na última identidade acima, temos que $f(c)f(-c) = 0$, donde $f(c) = 0$ ou $f(-c) = 0$. Caso tenhamos $f(c) = 0$, usamos (8) para obter

$$c = f(0) = f(f(c)) = (c+1)f(c) \;\Rightarrow\; c = 0.$$

Analogamente, no caso $f(-c) = 0$, também obtemos $c = 0$. Assim, concluímos que $f(0) = 0$, e fazendo $P(x+y, 0)$:

$$f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x+y)\overbrace{f(0)}^{=0} \Rightarrow f(f(x+y)) = f(x+y),$$

o que substituindo na equação funcional dada no problema, implica em $f(x)f(y) = xy$. Fazendo $x = y = 1$ nesta última, obtemos $f(1)^2 = 1$, donde $f(1) = \pm 1$. Caso $f(1) = 1$, basta tomar $y = 1$ para conseguir $f(x) = x$, que satisfaz a equação funcional. Caso $f(1) = -1$, o mesmo procedimento nos dá $f(x) = -x$, que não satisfaz a equação. Portanto, $f(x) = x$ é a única solução.

Problema 14. *Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que*

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2).$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Solução: Primeiro, para simplificar a equação, vamos fazer a seguinte mudança de variáveis: $u = x - y$ e $v = x + y$. Note que, assim, $x = (u+v)/2$ e $y = (v-u)/2$, donde a equação funcional dada pode ser reescrita como

$$uf(v) - vf(u) = 4\frac{(u+v)}{2}\frac{(v-u)}{2}uv \Rightarrow P(u,v): \; uf(v) - vf(u) = uv(v^2 - u^2).$$

Fazendo $P(u, 0)$, para $u \in \mathbb{R}^*$, obtemos $uf(0) = 0$, o que nos dá $f(0) = 0$. Caso $u, v \in \mathbb{R}^*$, dividimos a relação $P(u, v)$ por uv, para conseguir,

$$\frac{f(v)}{v} - \frac{f(u)}{u} = v^2 - u^2 \Rightarrow \frac{f(v)}{v} - v^2 = \frac{f(u)}{u} - u^2, \; \forall u, v \in \mathbb{R}^*,$$

donde a função $g(x) = f(x)/x - x^2$ é constante para todo $x \in \mathbb{R}^*$. Seja $c \in \mathbb{R}$, tal constante. Então,

$$\frac{f(x)}{x} - x^2 = c \Rightarrow f(x) = x^3 + cx,$$

e observe que a condição $f(0) = 0$ é satisfeita por essa família de funções. O leitor fica a cargo de verificar que, dado $c \in \mathbb{R}$ qualquer, a função $f(x) = x^3 - cx$ satisfaz a equação funcional dada, o que finaliza o problema.

Problema 15. (IMO 2008) *Encontre todas as funções $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ para as quais*

$$\frac{f(x)^2 + f(y)^2}{f(z^2) + f(t^2)} = \frac{x^2 + y^2}{z^2 + t^2}$$

para todos $x, y, z, t \in (0, \infty)$ com $xy = zt$.

Solução: Denotamos a condição acima como $P(x, y, z, t)$. Fazendo $P(1, 1, 1, 1)$, conseguimos,

$$\frac{2f(1)^2}{2f(1)} = \frac{2}{2} \Rightarrow f(1)^2 = f(1),$$

donde $f(1)=1$. Agora, para $P(x,1,z,z)$, lembrando que, neste caso, $x=z^2$, obtemos

$$\frac{f(x)^2+f(1)}{2f(x)}=\frac{x^2+1}{2x} \Rightarrow x(f(x)^2+1)-f(x)(x^2+1)=0 \Rightarrow (xf(x)-1)(f(x)-x)=0,$$

donde para todo $x\in(0,\infty)$, devemos ter $f(x)=x$ ou $f(x)=1/x$. Perceba que ambas são soluções da equação funcional dada (a condição $xy=zt$ no caso $f(x)=1/x$ se faz necessária). Agora, mostremos que não é possível ter, para $x\neq y\in(0,\infty)-\{1\}$, $f(x)=x$ e $f(y)=1/y$ em uma mesma função. Para isso, suponha o contrário e tome $P(x,y,z,z)$, donde $z^2=xy$, e conseguimos

$$\frac{f(x)^2+f(y)^2}{2f(xy)}=\frac{x^2+y^2}{2xy} \Rightarrow f(xy)=\frac{xy(x^2+1/y^2)}{x^2+y^2}.$$

Por outro lado, como $f(xy)=xy$ ou $1/xy$, temos dois casos,

- $\cancel{xy}=f(xy)=\frac{\cancel{xy}(x^2+1/y^2)}{x^2+y^2} \Rightarrow \cancel{x^2}+y^2=\cancel{x^2}+1/y^2 \Rightarrow y^4=1 \Rightarrow y=1$, que não é possível.
- $\frac{1}{xy}=f(xy)=\frac{\cancel{xy}(x^2+1/y^2)}{x^2+y^2} \Rightarrow x^2+y^2=x^2y^2(x^2+1/y^2) \Rightarrow \cancel{x^2}+y^2=x^4y^2+\cancel{x^2} \Rightarrow x^4=1 \Rightarrow x=1.$

Com isso, concluímos o problema, encontrando apenas duas funções que satisfazem a equação funcional: $f(x)=x$ e $f(x)=1/x$.

Problema 16. *Encontre todas as funções* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *tais que*

$$f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1.$$

para todos $x,y\in\mathbb{R}$.

Solução: Primeiro, tome $x\in Im(f)$, onde $x=f(y)$ para algum $y\in\mathbb{R}$. Então,

$$f(0)=f(x)+x^2+f(x)-1 \;\Rightarrow\; f(x)=\frac{f(0)-x^2+1}{2},$$

donde denotando $c=f(0)$, obtemos a relação

$$f(x)=\frac{c-x^2+1}{2}. \tag{10}$$

Agora, fazendo $y=0$:

$$\begin{aligned} & f(x-f(0)) &&= f(f(0))+xf(0)+f(x)-1\\ \Rightarrow\quad & f(x-c) &&= f(c)+xc+f(x)-1\\ \Rightarrow\quad & f(x-c)-f(x) &&= f(c)+xc-1, \end{aligned} \tag{11}$$

para $x=0$ na última equação, conseguimos

$$f(-c)-f(0)=f(c)-1 \;\Rightarrow\; f(-c)-c=f(c)-1 \;\Rightarrow c\neq 0\,!$$

Dessa forma, a função $g(x) := f(x-c) - f(x) = f(c) + xc - 1$ é sobrejetiva. Portanto, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists t \in \mathbb{R}$ tal que $x = g(t) = f(t-c) - f(t)$. Denotando por $y_1 = f(t-c)$ e $y_2 = f(t)$, conseguimos pela equação original,

$$\begin{aligned}
f(x) = f(y_1 - \overbrace{y_2}^{f(t)}) &= f(y_2) + y_1 y_2 + f(y_1) - 1 \\
&= \frac{c - y_2^2 + 1}{2} + y_1 y_2 + \frac{c - y_1^2 + 1}{2} - 1 \qquad (12) \\
&= \frac{2c - (y_1 - y_2)^2}{2} \\
&= c - \frac{x^2}{2}, \qquad (13)
\end{aligned}$$

onde em (12) usamos (10), já que $y_1, y_2 \in \operatorname{Im}(f)$. Por outro lado, juntando (10) e (13), obtemos

$$\frac{c - x^2 + 1}{2} = f(x) = c - \frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{c+1}{2} = c \Rightarrow c = 1.$$

Portanto, $f(x) = 1 - x^2/2$. Reciprocamente, pode-se verificar que $f(x) = 1 - x^2/2$ é solução da equação funcional, terminando o problema.

Problema 17. (PAGMO 2021) Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que a identidade

$$f(x + yf(x+y)) + xf(x) = f(xf(x+y+1)) + y^2 \qquad (14)$$

é válida para todo par x, y de números reais.

Solução: Fazendo $y = 0$ em (14), obtemos

$$(x+1)f(x) = f(xf(x+1)). \qquad (15)$$

Agora, $x = -1$ em (15) nos dá $f(a) = 0$, onde $a = -f(0)$. Por outro lado, fazendo $x = 0$ de volta em (14), conseguimos

$$f(yf(y)) = y^2 + f(0). \qquad (16)$$

Agora, substituindo y por a em (16), vemos que

$$f(\underbrace{af(a)}_{=0}) = a^2 + f(0) \Rightarrow a = 0.$$

Consequentemente, temos $f(0) = -a = 0$. Agora, tomando $y = 1$ in (16), e usando o que acabamos de encontrar, conseguimos

$$f(f(1)) = 1.$$

Agora, tome $y = -x$ em (14), e como $f(0) = 0$, chegamos em

$$(x+1)f(x) = f(xf(1)) + x^2, \qquad (17)$$

o que, fazendo $x = 1$, implica em $f(1) = 1$, já que $f(f(1)) = 1$. Com isso, podemos reescrever (17) como

$$xf(x) = x^2.$$

Para $x \neq 0$, já sabemos que $f(x) \neq 0$, donde segue que $f(x) = x$. Isso também é válido para $x = 0$. Assim, uma verificação rápida nos mostra que $f(x) = x$ satisfaz a equação (14).

Problemas Propostos

É hora de colocar em prática tudo o que foi visto até aqui. Estes problemas, estão longe de serem considerados “triviais", por isso, não desanime se a solução não sair! Assim como no caso das Equações Diofantinas, é necessário ver e praticar diversas técnicas, para se ter mais facilidade com esse tipo de problema.

Problema 18. (BMO 1997/2004) Determine todas as $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y,$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 19. (Balcânica 2007) *Encontre todas as funções* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tais que*

$$f(f(x) + y) = f(f(x) - y) + 4f(x)y.$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 20. (USAMO 2002) *Encontre todas as funções* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tais que*

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y).$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 21. (Vietnam 2014) *Encontre todas as funções* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *tais que*

$$f(2m + f(m) + f(m)f(n)) = nf(m) + m,$$

para todos $m, n \in \mathbb{Z}$.

Problema 22. (Balcânica 2000) *Encontre todas as funções* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tais que*

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y,$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 23. *Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que*

$$f(x - f(y)) = f(x) + xf(y) + f(f(y)),$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 24. *Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que*

$$f(xy + 2x + 2y) = f(x)f(y) + 2x + 2y,$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 25. *Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que*

$$f(x + y) - f(x) - f(y) = xy(x + y),$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.