

Invariantes

Bernardo P. Trevizan

27 de janeiro de 2023

1 O que é uma invariante?

Em problemas onde são realizados algum tipo de operação e queremos chegar em um estado final, a ideia é achar alguma conta ou forma de organização com os dados da situação que não se altere com a aplicação das operações. Vamos ver alguns métodos para achar essas invariantes.

2 Algumas ideias úteis

- Em operações com números, olhar para soma ($\sum x$) e produto ($\prod x$) deles são ideias comuns. Mas considerar outras somas simétricas, como a soma dos quadrados ($\sum x^2$), a soma dos produtos dois a dois ($\sum xy$) e a soma dos inversos ($\sum \frac{1}{x}$), também são ideias importantes.
- Paridade e módulo 3 também são ideias recorrentes. Mesmo que a operação não mantenha os dados do problema constantes, se eles variarem de maneira fixa (por exemplo, a cada operação uma quantidade aumenta em 1 módulo 3), também temos uma invariante.
- Em tabuleiros, colorações em xadrez, em linhas alternadas pretas e brancas, ou em diagonais alternadas em algumas quantidade de cores são técnicas clássicas.
- Quando o problema tem cara de invariante (operações e coberturas), mas as ideias lembradas não funcionaram, podemos tentar fazer uma engenharia reversa da operação. Por exemplo, podemos escrever a expressão de uma operação com números de formas diferentes para ter uma intuição. Também podemos escrever como algumas quantidades importantes do problema variam e procurar qual o módulo que faz essa variação ser fixa. Em tabuleiros, podemos ir construindo uma coloração tal que cada peça tenha uma casa de cada cor, ou uma quantidade par/ímpar de cada cor, assim a quantidade e a cobertura das peças pode ser relacionada com a quantidade e as posições das casas de cada cor.

3 Problemas

1. No planeta colorido, os únicos habitantes são camaleões, que são verdes, amarelos ou azuis. A lei do planeta dita que os camaleões mudam de cor se, e somente se, dois camaleões de cores diferentes se encontram; nesse caso, ambos mudam para a terceira cor. Sendo a , b e c as quantidades iniciais de camaleões verdes, amarelos e azuis, respectivamente, para que valores das ternas (a, b, c) é possível que os camaleões fiquem da mesma cor?
2. (OMCPLP 2022) Um colar contém 2024 pérolas, cada uma delas sendo preta, verde, ou amarela. A cada segundo, cada uma das pérolas mudarão de cor simultaneamente de acordo com as seguintes regras:
 - se suas duas vizinhas são da mesma cor, então ela mudará para essa mesma cor;
 - se suas vizinhas são de cores diferentes, então ela mudará para a terceira cor.
 - a) Existe um colar cujo suas pedras podem ser transformadas todas em amarelo eventualmente, se inicialmente metade delas são pretas e metade são verdes?
 - b) Existe um colar cujo suas pedras podem ser transformadas todas em amarelo eventualmente, se inicialmente 998 são pretas e 1026 são verdes?
3. (OBMEP 2015 - adaptado) Um tabuleiro 8×8 é coberto com 21 peças retangulares 3×1 ou 1×3 , de modo que uma casa não é preenchida. Quais são as possíveis posições da casa não preenchida?

4. (Teste Conesul 2017) Considere um tabuleiro $2n \times 2n$ onde todos os seus quadradinhos unitários estão pintados inicialmente de branco. Uma operação consiste em escolher três quadradinhos consecutivos em uma mesma linha ou em uma mesma coluna e trocar as cores de cada um destes quadradinhos (se um quadradinho é branco, ele vira preto e vice-versa). Determine todos os $n \geq 2$ para os quais é possível, após uma sequência finita de operações, chegar a um tabuleiro com a coloração semelhante à coloração de um tabuleiro de xadrez, ou seja, quaisquer dois quadradinhos com um lado em comum possuem sempre cores distintas.
5. (Bulgaria 2004) Dado uma palavra formada pelas letras a, b , podemos mudar blocos de letras consecutivas da palavra de acordo com as seguintes regras: aba muda para b e vice-versa, bba muda para a e vice-versa. Se a palavra inicial é $aaa \dots ab$, onde a aparece 2003 vezes, podemos chegar na palavra $baaa \dots a$, onde a aparece 2003 vezes?
6. (OBM 2018) Uma pessoa escreve, inicialmente, os números $1, 2, 3, \dots, 10$ em um quadro. Uma operação consiste em deletar dois números a, b e escrever $a + b + \frac{ab}{f(a,b)}$ no quadro, onde $f(a, b)$ é a soma de todos os números no quadro exceto a e b . Essa pessoa vai fazer operações até restarem apenas dois números x, y com $x \geq y$. Ache o maior valor possível de x .