Algoritmizando os números?

Maria Clara Werneck
mclarawerneck@gmail.com

1 Introdução

Vamos ver um pouco de Teoria de Números com Algoritmos, muitas vezes recursivos ou indutivos.

Imagina que uma mágica irá fazer uma mágica com você. Há 27 cartas de baralho distintas. Você pega uma carta, que não mostra para a mágica e conta para ela um número n entre 1 e 27. Então, a mágica distribui as cartas igualmente e sequencialmente em 3 bolos, cada um com 9 cartas. Você diz para a mágica qual bolo sua carta está. Ela faz esse procedimento exatamente 3 vezes. Então, ela toma o baralho e a n-ésima carta virada é a sua. Como ela fez isso? É mágica ou matemática?

2 Básico de TN

- (Não é TN!) Faça casos pequenos!
- (Algoritmo da divisão euclidiana) Dados a e b inteiros, existem únicos q e r inteiros tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < b$.
- (Unicidade da fatoração dos primos nos inteiros) p primo tal que $p|ab \implies p|a$ ou $p|b$.
- Se n composto, existe p primo tal que $p < \sqrt{n}$ e $p|n$.
- (Teorema de Bèzout) Sejam a, b inteiros. Existem x, y inteiros tais que $ax + by = n$ se e, somente se, $\text{mdc}(a, b)|n$.
- (Lema de Chicken Mc'Nuggets) Sejam a e b inteiros positivos primos entre si. Então, $abab$ é o maior inteiro que não pode ser escrito na forma $ax + by$ com x, y inteiros não negativos.
- Teorema Chinês dos restos
- Algoritmo guloso

3 Mágicas ou problemas olímpicos?

Problema 1. São dadas $n \geq 2$ fichas, numeradas de 1 a n. As fichas são colocadas em um círculo, não necessariamente em ordem. Inicia-se com a ficha de número 1. A cada turno, se estamos na ficha de número i, pulamos para a ficha que está i posições à frente em sentido horário.
Determine todos os valores de n para os quais é possível ordenar as fichas no círculo, de modo que todas serão visitadas durante o processo.

Problema 2. (PUTNAM 2000) Prove que para todos pares de inteiros $n \leq m \leq 1$:

$$\frac{\text{mdc}(m, n)}{n}\binom{n}{m}$$

é um inteiro.

Problema 3. (Teorema de Zeckendorf). Prove que todo inteiro positivo pode ser escrito unicamente como soma de um ou mais números de Fibonacci tais que não há duas que são números de Fibonacci consecutivos.

Problema 4. Esmeralda escreve $2n$ números reais $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$, todos pertencentes ao intervalo $[0, 1]$, ao redor de um círculo e multiplica todos os pares de numeros vizinhos entre si, obtendo, no sentido anti-horário, os produtos $p_1 = x_1x_2, p_2 = x_2x_3, \ldots, p_2n = x_{2n}x_1$. Ela soma os produtos de índice par e subtrai os produtos de índice ímpar. Qual é o maior resultado que Esmeralda pode obter?

Problema 5. Inicialmente um número está escrito no quadro. Então, a cada minuto, Esmeralda escolhe um divisor $d > 1$ do número n escrito na lousa, apaga n e escreve $n + d$. Se o número inicial é 2022, qual é o maior número composto que Esmeralda nunca poderá escrever no quadro?

Problema 6. São dadas a reta real e os únicos pontos marcados 0 e 1. Podemos realizar quantas vezes quisermos a seguinte operação: tomamos dois pontos já marcados a e b e marcamos o simétrico de a com relação a b. Seja $f(n)$ a quantidade mínima de operações necessárias para marcar na reta real o número n (que é o número a uma distância $|n|$ do 0 e está à direita de 0 se n ¿ 0 e à esquerda de 0 se n ¡ 0). Por exemplo, $f(0) = f(1) = 0$ e $f(1) = f(2) = 1$. Encontre $f(n)$.

Problema 7. Prove que para todo inteiro positivo m, existe um inteiro positivo n_m tal que para todo inteiro positivo $n \geq n_m$, existem inteiros positivos (não necessariamente distintos) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que

$$\frac{1}{a_1^m} + \frac{1}{a_2^m} + \cdots + \frac{1}{a_n^m} = 1$$

Problema 8. Sejam k, n inteiros positivos fixados. Em uma mesa circular, são colocados n pinos numerados sucessivamente com os numeros $1, \ldots, n$, com 1 e n vizinhos. Sabe-se que o pino 1 é dourado e os demais são brancos.

Arnaldo e Bernaldo jogam um jogo, em que uma argola e colocada inicialmente em um dos pinos e a cada passo ela muda de posição. O jogo começa com Bernaldo escolhendo um pino inicial para a argola, e o primeiro passo consiste no seguinte: Arnaldo escolhe um inteiro positivo d qualquer e Bernaldo desloca a argola d pinos no sentido horario ou no sentido anti-horário (as posições são consideradas módulo n, ou seja, os pinos x, y são iguais se e somente se n divide xy). Após isso, a argola muda de pinos de acordo com uma das seguintes regras, a ser escolhida em cada passo por Arnaldo:

Regra 1: Arnaldo escolhe um inteiro positivo d qualquer e Bernaldo desloca a argola d pinos no sentido horário ou no sentido anti-horário.
Regra 2: Arnaldo escolhe um sentido (horário ou anti-hor ário), e Bernaldo desloca a argola nesse sentido em d ou kd pinos, onde d é o tamanho do último deslocamento realizado.

Arnaldo vence se, após um número finito de passos, a argola é deslocada para o pino dourado. Determine, em função de k, os valores de n para os quais Arnaldo possui uma estratégia que garanta sua vitória, não importando como Bernaldo jogue.

4 Referência

[1] Prof. Armando Barbosa, Algoritmos e a questão 5 da IMO/2017, Semana Olímpica 2018, `https://www.obm.org.br/content/uploads/2018/01/algoritmos_SO_2018.pdf`
[2] Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro, BROCHERO, Fábio; et al. IMPA, 2013.