Problema 1. Prove que para quaisquer oito reais a, b, c, d, e, f, g, h pelo menos um dos valores a seguir:

$$ac + bd, ae + bf, ag + bh, ce + df, cg + dh, eg + fh$$

é não negativo.

Problema 2. (São Petesburgo) Em uma escola com n alunos, todos participam de clubes e cada clube contém pelo menos duas pessoas. Sabe-se que há $k > 1$ clubes e que cada par de alunos frequenta juntos exatamente um clube. Prove que $n \leq k$.

Problema 3. Em uma festa há $2n$ pessoas, cada uma tem um número par de amigo. Prove que existem duas pessoas com um número par de amigos em comum.

Problema 4. Existe uma configuração de 22 pontos e 22 círculos no plano de modo que:

(i) Cada ponto está em pelo menos 7 círculos.

(ii) Cada círculo contém pelo menos 7 pontos.

Problema 5. (IMO 1998) Num concurso, há m candidatos e n juízes, onde $n \geq 3$ é ímpar. Cada candidato é avaliado por cada juiz, podendo ser aprovado ou reprovado. Sabe-se que os julgamentos de cada par de juízes coincidem em no máximo k candidatos. Prove que

$$\frac{k}{m} \geq \frac{n-1}{2n}.$$

Problema 6. (IMO 1987) Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais tais que $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. Prove que para todo inteiro $k \geq 2$ existem inteiros $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nem todos zeros, tais que $|a_i| \leq k - 1$ para todo i, e

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

Problema 7. São dados 666 pontos no plano tais que esses pontos não possam ser cobertor por 10 retas. Mostre que podemos escolher 66 desses pontos que não podem ser cobertos por 10 retas.

Problema 8. Seja S um conjunto não-vazio. Se S possui um número para de elementos, dizemos que S é par. Seja $M = \{1, 2, ..., 2012\}$. Suponha que existem k subconjuntos pares $A_1, ..., A_k$ de M tais que $A_i \cap A_j$ não é par, para quaisquer $1 \leq i < j \leq k$. Qual é o maior valor possível de k?