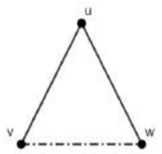
Contando chifres e o problema 6 da OBM N3

Bernardo P. Trevizan

26 de janeiro de 2023

1 O que são chifres?



Em geral, definimos um chifre em um grafo como um par $(u, \{v, w\})$, onde u, v, w são vértices distintos e $\{u, v\}$ e $\{u, w\}$ são arestas, independentemente de $\{v, w\}$ ser ou não aresta.

Contar chifres é uma das ideias mais importantes de contagem dupla. Eu diria que chifres são a estrutura número 3 em termos de importância em um grafo (depois de vértices e arestas). Sempre cheque se olhar para eles não pode trazer uma equivalência bacana para as condições dadas e/ou pedidas pelo problema.

2 Algumas ideias úteis

- Se V é o conjunto de vértices e $deg(u)$ é o grau de u, então, contando pelos vértices u dos chifres, um grafo tem $\sum\limits_{u \in V} \binom{deg(u)}{2}$ chifres.
- A depender do enunciado, podem ser considerados apenas os chifres com $\{v, w\}$ não aresta, com um conjunto $\{v, w, x\}$ de vizinhos de u, ou outra restrição adequada.
- Contar os chifres através do conjunto $\{v, w\}$ do par é contar as interseções das vizinhanças de pares de vértices.
- Podemos interpretar um tabuleiro com algumas casas pintadas como um grafo bipartido onde os vértices de uma das partes correspondem as linhas, os da outra correspondem as colunas, e as arestas correspondem as casas pintadas. Aqui chifres são equivalentes a pares de casas em uma linha/coluna.
- Também podemos interpretar uma família de subconjuntos de um conjunto como um grafo bipartido, de modo que os vértices de uma parte correspondem aos subconjuntos, da outra correspondem aos elementos do conjunto, e as arestas ligam os subconjuntos aos seus elementos. Em geral, queremos olhar chifres aqui para contar as interseções de subconjuntos.
- Em grafos bipartidos, geralmente vamos olhar para as partes de forma assimétrica. Para fins de contar chifres, queremos olhar para u variando em apenas uma das partes e $\{v, w\}$ na outra.

3 Ideias importantes em desigualdades para contagem

- $(MQ \geq MA)$ $\sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{n}} \geq \frac{\sum_i x_i}{n}$.
- (Jensen) Se f é uma função convexa ($f''(x) \geq 0 \forall x$), então $\frac{\sum_i f(x_i)}{n} \geq f(\frac{\sum_i x_i}{n})$.
- (Karamata) Se f é uma função convexa e $(x_1, x_2, ..., x_n) \succ (y_1, y_2, ..., y_n)$ (dizemos que a primeira n-úpla *majora* a segunda se $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq ... \geq y_n$, $x_1 \geq y_1$, $x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$, ..., $x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} \geq y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}$ e $x_1 + x_2 + ... + x_n = y_1 + y_2 + ... + y_n$), então $\sum f(x_i) \geq \sum f(y_i)$.
- Quando $x_1, x_2, ..., x_n$ são inteiros não negativos com $x_1 + x_2 + ... + x_n = S$ fixo e $n \nmid S$, então não há caso de igualdade no Jensen. Assim, podemos melhorar a desigualdade fazendo $y_i \in \{\lfloor \frac{S}{n} \rfloor, \lceil \frac{S}{n} \rceil\} \forall i$ com $y_1 + y_2 + ... + y_n = S$ e usando Karamata (prove que qualquer n-úpla de x majora essa n-úpla de y). Dizemos que essa é a divisão justa de S em n partes.
- Como alternativa a Karamata, basta provar que, se $x - y \geq 1$, então $f(x) + f(y) \geq f(x-1) + f(y+1)$. Assim, trocando o par (x, y) por $(x-1, y+1)$ iterativamente, podemos provar a desigualdade do item anterior.

- $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)...(x-k+1)}{k!}$ é um polinômio de grau k, k raízes $0, 1, ..., k-1$ e coeficiente líder positivo. Portanto $\binom{x}{k}$ é convexo para $x \geq k-1$. Restringindo x aos inteiros não negativos, podemos definir

$$\binom{x}{k} = \begin{cases} \frac{x(x-1)...(x-k+1)}{k!} \text{ se } x > k-1 \\ 0 \text{ se } x \in [0, k-1] \end{cases}$$

  Desse modo podemos adaptar o binomial para supor que ele é convexo.

- Analise os casos de igualdade quando estiver fazendo desigualdades nas contagens. Seja para ajudar a montar exemplos ou para mostrar que os casos não podem ser atingidos simultaneamente e melhorar a cota.

4 Problemas

1. É dado um grafo completo de 6 vértices com suas arestas coloridas de azul e vermelho. Prove que o grafo tem 2 triângulos monocromáticos.

2. (Conesul 2013 - adaptado) Semciclolândia é um país com 500 cidades e 2016 estradas de mão dupla, cada uma conectando duas cidades. Duas cidades A e B são vizinhas se existe uma estrada conectando elas, e duas cidades A e B são quase-vizinhas se existe uma cidade C tal que A é vizinha de C e C é vizinha de B. É conhecido que, em Semciclolândia, não há duas cidades conectadas por mais de uma estrada, e não existem quatro cidades A, B, C e D de modo que A é vizinha de B, B é vizinha de C, C é vizinha de D, e D é vizinha de A. Mostre que existe uma cidade que é quase-vizinha de pelo menos 58 outras cidades.

3. (Iberoamericana 2001) Seja S um conjunto de n elementos e $S_1,\ S_2, ...,\ S_k$ subconjuntos de S ($k \geq 2$), de modo que todos eles tenham pelo menos r elementos. Prove que existem i e j, com $1 \leq i < j \leq k$, tal que o número de elementos comuns de S_i e S_j é maior ou igual a $r - \frac{nk}{4(k-1)}$.

4. (China TST 1995) Vinte e uma pessoas fizeram uma prova com 15 questões de verdadeiro ou falso. Para cada duas pessoas, foi constatado que existe uma questão que ambas acertaram. Determine o menor número k tal que é possível que todas as questões foram respondidas por no máximo k pessoas.

5. (OBM 2022) Algumas casas de um tabuleiro 10×10 são pintadas de roxo. Um conjunto de 6 casas é dito especial quando elas são a interseção de 2 linhas com 3 colunas, ou 3 linhas com 2 colunas, e elas são roxas. Determine o maior valor de n para o qual é possível colorir n casas de modo que não haja um conjunto especial.

6. (IMO 2005) Em uma competição de matemática, 6 problemas foram propostos para todos os participantes. Após eles fazerem a prova, foi constatado que qualquer par desses problemas foi resolvido por mais de $\frac{2}{5}$ dos competidores. Além disso, nenhum dos participantes resolveu os 6 problemas. Mostre que existem pelo menos 2 participantes que resolveram exatamente 5 problemas cada.