Combinatória Aditiva - Nível 3

Rafael Miyazaki - rafaelkmiyazaki@gmail.com

Rio de Janeiro, 25 de Janeiro de 2023

1 Teoremas

Teorema 1 (Cauchy-Davenport)**.** *Seja p um número primo, e sejam A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Então*

$$|A+B| \geq \min(p, |A|+|B|-1).$$

Teorema 2 (Chowla)**.** *Seja n um número natural e A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Se $0 \in B$ e $(b,n)=1$ para todo $b \in B \setminus \{0\}$, então*

$$|A+B| \geq \min(n, |A|+|B|-1).$$

Teorema 3 (Pillai)**.** *Seja n um número natural e sejam A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Escrevendo $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s\}$ e tomando $d = \max\{(n, \beta_i - \beta_j), 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq s, i \neq j\}$, temos*

$$|A+B| \geq |A|+|B|-1,$$

se $|A|+|B|-1 \leq n/d$, e $|A+B| = n/d$, caso contrário.

Teorema 4 (Erdös-Ginzburg-Ziv)**.** *Para qualquer sequência $a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}$ de (não necessariamente distintos) elementos de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ existe um conjunto $I \subset \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ de cardinalidade n tal que $\sum_{i \in I} a_i = 0$.*

2 Problemas

Problema 1 (Romênia)**.** Sejam X e Y dois subconjuntos finitos do intervalo $[0, 1)$ tais que $0 \in X + Y$ e não existe par $(x, y) \in X \times Y$ tal que $x + y = 1$. Prove que o conjunto $\{x + y - \lfloor x + y \rfloor : x \in X \text{ and } y \in Y\}$ tem pelo menos $|X| + |Y| - 1$ elementos.

Problema 2 (Polônia)**.** Prove que para todo primo $p > 3$ existem inteiros x, y e k com $0 < 2k < p$ tais que

$$kp + 3 = x^2 + y^2.$$

Problema 3. Para quais números primos p vale a sequinte afirmação? Para todo inteiro n existem inteiros x e y tais que $x^3 + y^3 - n$ é um múltiplo de p.

Problema 4 (USATSTST 2013)**.** Seja p um número primo. Prove que qualquer grafo completo com $1000p$ vértices cujas arestas são rotuladas com números inteiros deve conter um ciclo cuja soma dos rótulos das arestas é um múltiplo de p.

Problema 5. Seja p um número primo e d inteiro positivo. Então todo inteiro pode ser escrito como soma de d potências d-ésimas módulo p.

Problema 6 (USATSTST 2011/12)**.** Seja n um inteiro positivo. São dados $2^n + 1$ conjuntos distintos, cada um dos quais contendo um número finito de elementos. Os conjuntos são então divididos em duas categorias(azul e vermelho), de forma que cada categoria contém pelo menos um conjunto.

Dizemos que a diferença simetrica entre dois conjuntos é o conjunto de elementos que pertence a exatamente um dos dois conjuntos.

Prove que existem pelo menos 2^n conjuntos distintos que podem ser obtidos como diferença simétrica entre um conjunto vermelho e um conjunto azul.

Problema 7 (Bulgária)**.** Sejam m e n inteiros positivos e p um número ímpar. Encontre o maior inteiro positivo s tal que para qualquer conjunto de mnp inteiros positivos é possível escolher um subconjunto de snp elementos que pode ser particionado em s conjuntos de np elementos cujas somas dos membros têm o mesmo resto na divisão por p.