Geometria com Complexos

Marcelo Machado Lage

Semana Olímpica 2023

1 Formulário

A menos que explicitado o contrário, um ponto "tradicional" é escrito com letra maiúscula, e sua representação complexa com letra minúscula.

Um elemento $z \in \mathbb{C}$ tem duas representações canônicas:

$$z = a + bi, \quad a\,, b \in \mathbb{R}$$

$$z = r\ \mathrm{cis}\,\theta \quad (r = |z| = \sqrt{z\overline{z}},\ \text{e}\ \theta = \arg z)$$

O conjugado de z é $\overline{z} = a - bi = r\ \mathrm{cis}(-\theta)$.

Proposição.

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$$

$$z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$$

Ângulos direcionados com números complexos:

$$\frac{a-o}{b-o} \in \mathrm{cis}(\measuredangle BOA)\,\mathbb{R}$$

1.1 Fórmulas Gerais

Proposição.

$$AB \parallel CD \iff \frac{a-b}{c-d} \in \mathbb{R}$$

Proposição.

$$AB \perp CD \iff \frac{a-b}{c-d} \in i\mathbb{R}$$

Proposição.

$$Z \in AB \iff \frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R}$$

Proposição.

$$ABCD \text{ é cíclico} \iff \frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} \in \mathbb{R}$$

Proposição. A reflexão de Z por AB é

$$\overline{\left(\frac{z-a}{b-a}\right)} \cdot (b-a) + a$$

1.2 Fórmulas de Círculo Unitário

A, B, C, D são pontos quaisquer do círculo de referência (a, b, c, d são complexos sobre o círculo unitário).

Proposição. Z é um ponto sobre o círculo unitário se, e somente se, $z\overline{z} = 1$.

Proposição (Equação da corda)**.**

$$Z \in AB \iff z + ab\overline{z} = a + b$$

(fazendo $b = a$ temos a tangente por a)

Proposição (Interseção de cordas)**.** AB e CD se intersectam em

$$\frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}$$

Proposição (Interseção de tangentes)**.** As tangentes por A e B se intersectam em

$$\frac{2ab}{a+b}$$

Proposição (Reflexão por corda)**.** A reflexão de Z por AB é

$$z' = a + b - ab\overline{z}$$

Proposição (Projeção na corda)**.** A projeção de Z em AB é

$$\frac{1}{2}(z + z') = \frac{1}{2}(z + a + b - ab\overline{z})$$

1.3 Centros de Triângulo

Parametrização tradicional:

(ABC) no círculo unitário com $A = a$, $B = b$, $C = c$

Proposição. O circuncentro O de $\triangle ABC$ é $O = 0$

O baricentro G de $\triangle ABC$ é $G = \frac{a+b+c}{3}$

O ortocentro H de $\triangle ABC$ é $H = a + b + c$

O centro do Círculo dos Nove Pontos O_9 de $\triangle ABC$ é $O_9 = \frac{a+b+c}{2}$

Proposição. A Reta de Euler de $\triangle ABC$ é

$$z = (a+b+c)k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Parametrização de pontos médios:

(ABC) no círculo unitário com $A = a^2$, $B = b^2$, $C = c^2$ e, sendo M_A, M_B, M_C os pontos médios dos arcos *menores* BC, CA, AB de (ABC), respectivamente:

$$M_A = -bc, \quad M_B = -ca, \quad M_C = -ab$$

Proposição (Incentro e exincentros)**.**

$$I = -ab - bc - ca$$

$$I_A = 2M_A - I = ab - bc + ca,$$

$$I_B = ab + bc - ca, \quad I_C = -ab + bc + ca$$

1.4 Outras Fórmulas

Proposição (Fórmula do circuncentro)**.** O circuncentro do triângulo de vértices x, y, z é dado por

$$o = \frac{\begin{vmatrix} x & x\overline{x} & 1 \\ y & y\overline{y} & 1 \\ z & z\overline{z} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & \overline{x} & 1 \\ y & \overline{y} & 1 \\ z & \overline{z} & 1 \end{vmatrix}}$$

Proposição (Miquel complexo)**.** Seja M o centro da roto-homotetia que leva AB em CD.

$$\frac{m-a}{m-b} = \frac{m-c}{m-d} \iff m = \frac{ad-bc}{a+d-b-c}$$

Proposição (Semelhança com determinante)**.** Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle XYZ$ são semelhantes *com a mesma orientação* se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} a & x & 1 \\ b & y & 1 \\ c & z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Se a semelhança for na orientação contrária, deve valer o mesmo com alguma das duas primeiras colunas conjugadas.

Proposição (Área do triângulo)**.** A área de $\triangle ABC$ é

$$\pm\frac{i}{4}\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}$$

A escolha de sinal depende do orientação do triângulo. Essa fórmula pode ser útil para provar colinearidades.

Transformações

Todas as fórmulas que abordam diretamente ângulos, semelhanças ou roto-homotetias podem ser vistas como aplicações do seguinte fato:

Proposição. A transformação $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $\phi(z) = az + b$, $a \neq 0$ é

- Uma translação, se $a = 1$
- Uma homotetia, se $a \in \mathbb{R}$
- Uma rotação, se $|a| = 1$
- Uma roto-homotetia, caso contrário

Proposição (Inversão no plano complexo)**.** A inversão por um círculo de centro c e raio R é dada por

$$z \mapsto \frac{R^2}{\overline{(z-c)}} + c$$

Em particular, $\frac{1}{\overline{z}}$ é o inverso de z pelo círculo unitário.

Ter esse olhar abstrato para transformações lineares em $\mathbb{C}$ costuma ajudar muito a encontrar atalhos nas contas.

Definição. Uma Transformação de Möbius é uma bijeção $\phi\colon \mathbb{C}\cup\infty \to \mathbb{C}\cup\infty$ ($\mathbb{C}\cup\infty$ é a chamada *reta projetiva complexa* ou *esfera de Riemann*) dada por

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

(aqui $\phi(\infty) = \frac{a}{c}$ e $\phi\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$).

Proposição. Uma Transformação de Möbius é uma composição de translações ($z \mapsto z + \beta$), roto-homotetias ($z \mapsto \alpha z$) e inversões seguidas de reflexão ($z \mapsto \frac{1}{z}$).

2 Fazendo Problemas na Conta

Os problemas que saem "direto" por conta são a minoria dos problemas complexáveis. Muitos outros problemas tornam-se complexáveis seguindo as recomendações básicas para problemas de geometria, como fazer uma boa figura, marcar ângulos, usar uma configuração conhecida... A partir disso é possível redefinir pontos ou reduzir o número de parâmetros da figura para complexar mais limpo, por exemplo.

Usar número complexos (ou qualquer outro método computacional) para provar um lema de uma solução *majoritariamente* sintética também é comum e muito válido.

Nunca tenha medo de misturar técnicas!

Conta Inteligente

A vida não é feita de "é só fazer: abre tudo que no final vai cancelar". Uma boa conta requer organização e planejamento.

- **Parametrize bem!** Nem sempre o círculo unitário será o (ABC): incírculo ou exincírculo são escolhas comuns. Escolher uma reta importante para ser a reta real também é uma escolha comum.
- **Fatorar é melhor que abrir!** Isso ajuda a "cartear" fatores e reduz o grau das contas
- **Explore simetria!**
  - Se X_A é simétrico em b e c, abra as contas vendo os termos grandes como polinômios em a
  - Se você quer provar que l_A, l_B e l_C concorrem em (ABC), basta calcular a interseção de l_A com (ABC) e ver que é uma função racional simétrica em a, b, c (isso abrevia *muitas* contas)
  - Escrever uma expressão usando polinômios simétricos e relações de Girard para fugir de equações de grau alto
- **Saiba conferir conta!** Você não quer recomeçar tudo se errar um sinal: torne fácil achar o erro
  - Confira os graus dos pontos. Por exemplo, um ponto que depende apenas de a, b, c (no círculo unitário) deve ser uma função racional homogênea de grau 1 em a, b, c

3 Problemas

Os problemas não estão em ordem de dificuldade. Problemas marcados com asterisco são particularmente desafiadores.
Ainda que a ideia seja resolvê-los usando números complexos, a conta a se fazer pode não ser óbvia. Por isso, faça boas figuras e procure reduzir o problema principal ou encontrar subproblemas não triviais complexáveis.

Aquecimento

Problema 1. Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico. Seja H_A o ortocentro de BCD. Defina H_B, H_C, H_D analogamente. Prove que AH_A, BH_B, CH_C e DH_D são concorrentes.

Problema 2 (OBM 2022)**.** Seja ABC um triângulo acutângulo, com $AB < AC$. Sejam K o ponto médio do arco BC da circunferência circunscrita a ABC que não contém A e P o ponto médio do lado BC. Os pontos I_B e I_C são os exincentros relativos aos vértices B e C, respectivamente. Seja Q a reflexão de K pelo ponto A. Mostre que P, Q, I_B e I_C estão sobre uma mesma circunferência.

Problema 3 (Ponto de Schiffler)**.** Seja I o incentro do triângulo ABC. Prove que as Retas de Euler dos triângulos $\triangle ABC$, $\triangle IBC$, $\triangle AIC$ e $\triangle ABI$ concorrem.

Problema 4 (Kömal B. 5285)**.** No triângulo ABC acutângulo, $AB = AC$. A', B', C' são ponto móveis sobre o circuncírculo de ABC de tal forma que $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$, e os triângulos têm a mesma orientação. Seja P a interseção de BB' e CC'. Prove que todas as retas $A'P$ passam por um ponto comum.

Problema 5 (IMO 1986)**.** É dado um ponto P_0 no plano do triângulo $A_1A_2A_3$. Defina $A_s = A_{s-3}$ para $s \geq 4$. Construa um conjunto de pontos $P_1, P_2, P_3, \ldots$ tais que P_{k+1} é a imagem de P_k sob uma rotação de centro A_{k+1} e ângulo $120°$ no sentido horário para $k = 0, 1, 2, \ldots$. Prove que se $P_{1986} = P_0$, $A_1A_2A_3$ é equilátero.

Problemas clássicos

Problema 6. Seja P um ponto qualquer no plano de $\triangle ABC$ de ortocentro H e circuncírculo Ω. Sejam A_1, B_1, C_1 as interseções de AP, BP, CP com Ω, respectivamente.

(a) Sejam A_2, B_2, C_2 as reflexões de A_1, B_1, C_1 pelos pontos médios de BC, CA, AB, respectivamente. Prove que H, A_2, B_2, C_2 estão sobre uma mesma circunferência.

(b) Sejam A_3, B_3, C_3 as reflexões de A_1, B_1, C_1 pelas retas BC, CA, AB, respectivamente. Prove que H, A_3, B_3, C_3 estão sobre uma mesma circunferência.

Problema 7 (OBM 2017)**.** No triângulo ABC, seja r_A a reta que passa pelo ponto médio de BC e é perpendicular à bissetriz interna de $\angle BAC$. Defina r_B e r_C da mesma forma. Sejam H e I o ortocentro e o incentro de ABC, respectivamente. Suponha que as três retas r_A, r_B, r_C definam um triângulo. Prove que o circuncentro desse triângulo é o ponto médio de HI.

Problema 8 (IMO 2012)**.** São dados o triângulo ABC e J o centro do A-exincírculo de ABC. Esse exincírculo é tangente a BC em M, e às retas AB e AC em K e L, respectivamente. As retas LM e BJ se intersectam em F, e as retas KM e CJ se intersectam novamente em G. Seja S o ponto de interseção de AF e BC, e T o ponto de interseção de AG e BC. Prove que M é o ponto médio de ST.

Problema 9 (IMO 2011 *)**.** Seja ABC um triângulo acutângulo cuja circunferência circunscrita é Γ. Seja ℓ uma reta tangente a Γ e sejam ℓ_a, ℓ_b e ℓ_c as retas obtidas ao refletir ℓ em relação às retas BC, CA e AB, respectivamente. Demonstre que a circunferência circunscrita ao triângulo determinado pelas retas ℓ_a, ℓ_b e ℓ_c é tangente à circunferência Γ.

Problema 10 (IMO SL 2018)**.** Seja ABC um triângulo de circuncírculo Ω e incentro I. Uma reta ℓ intersecta AI, BI e CI nos pontos D, E e F, respectivamente, distintos de A, B, C e I. As mediatrizes x, y e z dos segmentos AD BE, e CF, respectivamente, determinam um triângulo Θ.
Mostre que o circuncírculo de Θ é tangente a Ω.

Problema 11 (IMO SL 2018)**.** Sejam O o circuncentro, e Ω o circuncírculo do triângulo acutânguloABC. Seja P um ponto arbitrário de Ω, diferente de A, B, C, e seu santípodas em Ω. Denote os circuncentros dos triângulos AOP, BOP, e COP por O_A, O_B, e O_C, respectivamente. As retas ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C perpendicualres a BC, CA, e AB passam por O_A, O_B, e O_C, respectivamente. Prove que o circuncírculo do triângulo formado por ℓ_A, ℓ_B, e ℓ_C é tangente à reta OP.

Problema 12 (IMO SL 2016)**.** Seja D o pé da perpendicular de A para a reta de Euler do triângulo acutângulo escaleno ABC. Uma circunferência ω de centro S passa por A e D, e intersecta os lados AB e AC em X e Y, respectivamente. Seja P o pé da altura de A em BC, e M o ponto médio de BC. Prove que o circuncentro do triângulo XSY é equidistante de P e M.

Problema 13 (IMO SL 2006)**.** Pontos A_1, B_1, C_1 são escolhidos sobre os lados BC, CA, AB do triângulo ABC, respectivamente. Os circuncírculos de AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 intersectam o circuncírculo de ABC novamente em A_2, B_2, C_2, respectivamente ($A_2 \neq A, B_2 \neq B, C_2 \neq C$). Os pontos A_3, B_3, C_3 são as reflexões de A_1, B_1, C_1 com respeito aos pontos médios dos lados BC, CA, AB, respectivam ente. Prove que os triângulos $A_2B_2C_2$ e $A_3B_3C_3$ são semelhantes.

Problema 14 (USAMO 2012)**.** Seja P um ponto no plano do triângulo $\triangle ABC$, e γ um reta passando por P. Seja A' a interseção da reflexão de PA por γ com a reta BC. Defina B', C' analogamente. Prove que A', B', C' são colineares.

Problema 15 (EGMO 2017)**.** Seja ABC um triângulo acutângulo escaleno. As reflexões do baricentro G e do circuncentro O de ABC pelo lados BC, CA, AB são denotadas G_1, G_2, G_3 e O_1, O_2, O_3, respectivamente. Mostre que os circuncírculos dos sete triângulos G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A e ABC têm um ponto comum.

Problemas recentes

Problema 16 (IMO 2019)**.** Seja I o incentro do triângulo acutângulo ABC com $AB \neq AC$. O incírculo ω de ABC é tangente aos lados BC, CA e AB em D, E, e F, respectivamente. A reta por D perpendicular a EF intersecta ω em R. A reta AR encontra ω novamente em P. Os circuncírculos dos triângulos PCE e PBF se intersectam novamente em $Q \neq P$.

Prove que as retas DI e PQ se intersectam na reta que passa por A e é perpendicular a AI.

Problema 17 (Ibero 2020)**.** Seja ABC um triângulo acutângulo e escaleno. Sejam H o ortocentro e O o circuncentro do triângulo ABC, e seja P um ponto interior do segmento HO. A circunferência de centro P e raio PA interseta novamente as retas AB e AC nos pontos R e S, respetivamente. Denotamos por Q o ponto simétrico ao ponto P com respeito à mediatriz de BC. Demonstre que os pontos P, Q, R e S pertencem a uma mesma circunferência.

Problema 18 (RMM 2020)**.** Seja ABC um triângulo retângulo em C. Seja I o incentro do triângulo ABC e seja D o pé da perpendicular de C sobre AB. O incírculo ω do triângulo ABC é tangente aos lados BC, CA e AB em A_1, B_1 e C_1, respectivamente. Sejam E e F as reflexões de C nas retas C_1A_1 e C_1B_1, respectivamente. Sejam K e L as reflexões de D nas retas C_1A_1 e C_1B_1, respectivamente.

Prove que os circuncírculos dos triângulos A_1EI, B_1FI e C_1KL possuem um ponto em comum.

Problema 19 (RMM 2019 *)**.** Seja $ABCD$ um trapézio isósceles com AB paralelo a DC. Seja E o ponto médio de AC. Denote por Γ e Ω os circuncírculos dos triângulos ABE e CDE, respectivamente. A tangente a Γ por A e a tangente a Ω por D se intersectam em P. Prove que PE é tangente a Ω.

Problema 20 (APMO 2021)**.** Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo cíclico e Γ seu circuncírculo. Seja E o ponto de interseção das diagonais AC e BD. Seja L o centro do círculo tangente aos segmentos AB, BC, e CD, e M o ponto médio do arco BC de Γ que não contém A e D. Prove que o E-exincentro de BCE pertence à reta LM.

Problema 21 (OMpD 2022 *)**.** Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico e M, N os pontos médios de AB e CD respectivamente. As diagonais AC e BD se intersectam em L. Suponha que o circuncírculo de LMN, de centro T, intersecta o circuncírculo de $ABCD$ em dois pontos distintos X, Y. Se a reta MN intersecta a reta XY em S e a reta XM intersecta a reta YN em P, prove que PL é perpendicular a ST.

Problema 22 (USEMO 2020 *)**.** Seja ABC um triângulo acutângulo de circuncentro O e ortocentro H. Seja Γ o circuncírculo de ABC e N o ponto médio de OH. As tangentes a Γ em B e C e a reta por H perpendicular a AN determinam um triângulo cujo circuncírculo denotamos ω_A. Defina ω_B e ω_C de forma análoga. Prove que o centro radical de ω_A, ω_B e ω_C está na reta OH.

Problema 23 (USA TST 2023 *)**.** Seja ABC um triângulo acutângulo. Sejam M o ponto médio do lado BC, E e F os pés das alturas de B e C, respectivamente. Suponha que as tangentes externas comuns dos circuncírculos de BME e CMF se intersectam K, e que K está sobre o circuncírculo de ABC. Prove que AK é perpendicular a BC.

Problema 24 (USA TST 2019)**.** Seja ABC um triângulo e M e N os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Seja X um ponto tal que $\overline{AX}$ é tangente ao circuncírculo de ABC. ω_B é o círculo que passa por M e B e é tangente a $\overline{MX}$, e ω_C é o círculo que passa por N e C e é tangente a $\overline{NX}$. Prove que ω_B e ω_C se encontram num ponto sobre a reta BC.

Problema 25 (USA TSTST 2022)**.** Sejam O e H o circuncentro e ortocentro, respectivamente, do triângulo acutângulo escaleno ABC. A mediatriz de $\overline{AH}$ intersecta $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ em X_A e Y_A respectivamente. Seja K_A a interseção dos circuncírculos dos triângulos OX_AY_A e BOC diferente de O. Defina K_B e K_C analogamente repetindo essa construção mais duas vezes. Prove que K_A, K_B, K_C, e O são concíclicos.

Problema 26 (USA TSTST 2022)**.** Seja ABC um triângulo. Seja θ um ângulo fixado tal que

$$\theta < \frac{1}{2}\min(\angle A, \angle B, \angle C).$$

S_A e T_A são pontos sobre o segmento BC com $\angle BAS_A = \angle T_AAC = \theta$. Sejam P_A e Q_A os pés das alturas de B e C em $\overline{AS_A}$ e $\overline{AT_A}$ respectivamente. ℓ_A é definida como a mediatriz de $\overline{P_AQ_A}$.

ℓ_B e ℓ_C são construídas analogamente (usando o mesmo valor de θ). Prove que ℓ_A, ℓ_B e ℓ_C são concorrentes ou paralelas.

Problema 27 (USA TSTST 2021 *)**.** Seja ABC um triângulo escaleno. Pontos A_1, B_1 e C_1 são escolhidos sobre os segmentos BC, CA and AB, respectivamente, tais que $\triangle A_1B_1C_1$ e $\triangle ABC$ são semelhantes. Seja A_2 o único ponto da reta B_1C_1 tal que $AA_2 = A_1A_2$. B_2 e C_2 são definidos analogamente. Prove que $\triangle A_2B_2C_2$ e $\triangle ABC$ são semelhantes.

Problema 28 (USA TSTST 2019)**.** Seja ABC um triângulo acutângulo de ortocentro H e circuncírculo Γ. Uma reta por H intersecta AB e AC em E e F, respectivamente. Seja K o circuncentro de $\triangle AEF$, e suponha que a reta AK intersecta Γ novamente em D. Prove que a reta HK e a reta por D perpendicular a $\overline{BC}$ se encontram em Γ.

Problema 29 (IMEO 2020 *)**.** Sejam O, I, e ω o circuncentro, incentro, e incírculo do triângulo não equilátero $\triangle ABC$. Seja ω_A o (único) círculo tangente a AB e AC, tal que a corda comum de ω_A e ω passa pelo centro de ω_A. Seja O_A o centro ω_A. Defina ω_B, O_B, ω_C, O_C analogamente.

Se ω tangencia BC, CA, AB em D, E, F respectivamente, prove que as perpendiculares de D, E, F a O_BO_C, O_CO_A, O_AO_B concorrem num ponto sobre a reta OI.

Problema 30 (Irã 2020)**.** O círculo Ω de centro I_A é o A-exincírculo de ABC, e é tangente a AB, AC em F, E, respectivamente. D é a reflexão de A por I_AB. As retas DI_A e EF se encontram em K. Prove que o circuncentro de DKE, o ponto médio de BC e I_A são colineares.

4 Recursos e referências

Outros materiais sobre geometria com complexos que eu escrevi podem ser acessados em

`https://linux.ime.usp.br/~marcelolage/complexos/`

incluindo:

- `comp-so`: o material que você tem em mãos;
- `comp-full`: os resultados elementares (alguns provados) com uma lista significativa de exercícios e exemplos resolvidos;
- `comp-extra`: transformações (incluindo Möbius), problemas de n-ágono e técnicas menos comuns; e
- `comp-resolv`: uma boa quantidade de problemas selecionados resolvidos com cobertura quase total da teoria desenvolvida;

E, é claro, há outros recursos bastante relevantes para o estudo de complexos nos quais me baseei fortemente para escrever os materiais acima.

"Complex Numbers in Geometry" - Marko Radovanović

O artigo do IMOMath é de 2007, mas ainda é muito atual. Tem soluções para os problemas propostos e aborda de forma satisfatória a teoria geral de complexos, incluindo vários problemas de n-ágono.

"Bashing Geometry with Complex Numbers" e EGMO - Evan Chen

O artigo é a referência padrão em complexos hoje, e `comp-full` é baseado nele mui fortemente. O capítulo do Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads é praticamente igual ao artigo, só que com alguns problemas e provas a mais.

"Geometric Transformations" - Răzvan Gelca, Ionuț Onișor, Carlos Yuzo Shine

Como o título denuncia, esse livro (publicado pela Springer) é referência essencial para a parte de transformações. A parte de isometrias e transformações de Möbius é fortemente motivada pelo uso de números complexos, e há grande quantidade de problemas propostos e soluções.