Contagem Dupla

Luíze D'Urso

1. Em Brasilândia existem apenas 9 casas muito distantes entre si. Prove que não é possível que cada casa esteja ligada a exatamente 7 outras casas através de estradas.

2. Em um treinamento com 20 estudantes, sabemos que cada um deles participará de exatamente 2 competições internacionais neste ano. Sabendo que todas essas competições são formadas de equipes de 4 estudantes, qual é mínimo de competições envolvidas?

3. Prove que numa festa com n pessoas, o número de pessoas que conhecem um número ímpar de outras pessoas na festa é par.

4. Em uma festa com 23 pessoas, é possível que cada um possua 1, 3 ou 5 amigos na festa?

5. É possível desenhar 9 segmentos de reta no plano de tal forma que cada um intersecta exatamente 3 outros?

6. Existem 1000 cidades em Brazilândia e alguns pares de cidades são ligadas por uma estrada de terra. É possível viajar de uma cidade para qualquer outra através das estradas de terra. Prove que o governo de Brazilândia pode pavimentar algumas estradas de modo que de cada cidade saia um número ímpar de estradas pavimentadas.

7. Prove que numa festa com $2n$ pessoas, existem duas com um número par de amigos em comum.

8. Considere uma triangulação arbitrária do triângulo ABC. Vamos marcar em cada vértice da triangulação um número 1, 2 ou 3 com as seguintes restrições: A, B e C são marcados com 1, 2 e 3, respectivamente e nos vértices dos lados BC, AC e AB não há vértices marcados com 1, 2 e 3, respectivamente. Prove que existe ao menos um pequeno triângulo cujos vértices são marcados com 1, 2 e 3.

9. Kellem e Jooj precisam decidir qual deles é mais maromba. Para deciddir, cada um recruta e treina seu time de estudantes que participarão de um torneio depois de um mês. Cada estudante enfrenta todos os outros (do seu time ou não) exatamente uma vez, verificando quem consegue levantar mais peso. Uma vitória dá 1 ponto, um empate dá 0.5 e uma derrota dá 0. Ao fim do torneio, percebemos que cada participante ganhou a mesma quantidade de pontos contra o time da Kellen e o time do Jooj. Prove que o total de estudantes recrutados é quadrado perfeito.

10. Considere uma tabela $l \times c$ com zeros e uns, sendo C_j a soma dos números na coluna j. Suponha que exista t tal que, para cada par de linhas, existam exatamente t colunas que tenham um em ambas as linhas. Prove que

$$t\binom{l}{2} = \sum \binom{C_j}{2}$$

11. Sejam A_1, A_2 ..., A_k subconjuntos de $\{1, 2, ..., n\}$ tais que $|A_i| \geq \frac{n}{2}$ para todo i e $|A_i \cap A_j| \leq \frac{n}{4}$ para todos i e j diferentes. Prove que $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| \geq \frac{k}{k+1}n$.

12. Duzentos estudantes participaram de uma competição de matemática. A prova tinha seis problemas. Sabe-se que cada problema foi resolvido por pelo menos 120 participantes. Prove que existem dois estudantes tais que cada problema foi resolvido por pelo menos um deles.

13. Prove que $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$

14. Prove que $\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$

15. Prove que $\sum_{i=1}^{k} \binom{n+i}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$

16. Prove que $\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$

17. Prove que $\sum_{i=1}^{n} i^2\binom{n}{i} = n(n+1)2^{n-2}$

18. Numa competição de matemática na qual foram propostos 6 problemas, quaisquer dois problemas foram resolvidos por mais de 2/5 dos estudantes. Além disso, nenhum estudante resolveu todos os 6 problemas. Mostre que existem pelo menos 2 estudantes que resolveram 5 problemas cada um.

19. Considere todas as maneiras de colocarmos nas casas de um tabuleiro 10×10 exatamente dez vezes cada um dos algarismos 0, 1 ,2 , ..., 9. Encontre o maior inteiro n com a propriedade de que, em cada tabuleiro, alguma linha ou alguma coluna contenha pelo menos n algarismos diferentes.

20. Dados números reais $x_1 < x_2 < ... < x_n$, suponha que todo número real ocorre no máximo duas vezes entre as diferenças $x_j - x_i$, com $1 \leq i < j \leq n$. Prove que há pelo menos $\lfloor n/2 \rfloor$ números reais que ocorrem exatamente uma vez entre tais diferenças.

21. Num concurso, há m candidatos e n juízes, onde $n \geq 3$ é ímpar. Cada candidato é avaliado por cada juiz, podendo ser aprovado ou reprovado. Sabe-se que os julgamentos de cada par de juízes coincidem em no máximo k candidatos. Prove que

$$\frac{k}{m} \geq \frac{n-1}{2n}$$

22. Vinte e um estudantes do nível U e vinte e um professores participaram da Vingança Olímpica. Sabe-se que cada participante resolveu no máximo seis problemas e que para cada par com um estudante e um professor, existe um problema que ambos resolveram. Prove que existe um problema que foi resolvido por três estudantes e três professores.

Referências

Programa Olímpico de Treinamento
Curso de Combinatória – Nível 3
Prof. Carlos Shine
Aula3
https://www.urantiagaia.org/educacional/matematica/combinatoria3/Aula03-Contagem_Dupla.pdf
Contagens Duplas
Samuel Feitosa
https://www3.ufpe.br/rtbortolotti/images/contagensduplas.pdf